**Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa**

**CLASE DIGITAL 1**

**(Funciones, definición y ejemplos)**

## 0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 1!

Mi nombre es Fernando Núñez Medina y seré tu asesor en este curso.

Antes de iniciar quiero comentarte de manera general lo que veremos en este curso.

Como ya lo sabes , este curso trata sobre el «Cálculo», más precisamente sobre el «Cálculo Diferencial». ¡Perfecto!, pero ¿qué es el Cálculo?, y en particular, ¿qué es el Cálculo Diferencial? El Cálculo es el estudio de funciones reales de una o varias variables reales, aunque en este curso nos concentraremos en el estudio de funciones reales de una variable real. En general, un curso de Cálculo de una variable se divide en el estudio de los siguientes temas:

1. Los números reales $\mathbb{R}$.
2. Funciones.
3. Límites.
4. Continuidad.
5. La derivada.
6. La integral.
7. Sucesiones y series de números reales.
8. Sucesiones y series de funciones.

Los temas 1 a 8 son el contenido usual de un curso de Cálculo Diferencial de una variable o Cálculo I, y los puntos 6,7 y 8 de un curso de Cálculo Integral de una variable o Cálculo II. Este curso se llama «Cálculo I», así que en este curso nos concentraremos en el estudio de los temas 1 a 5 señalados anteriormente.

Las gráficas y figuras del curso fueron generados con en programa Geogebra ©, un excelente programa que entre otras cosas sirve para graficar ecuaciones, se los recomiendo.

Para indicar el fin de una demostración usaremos el símbolo $\blacksquare$, y el símbolo $\square$ para el fin de un ejemplo. También usaremos los símbolos de la lógica " $\Rightarrow$ " y " $\Leftrightarrow$ " que se leen «implica» y «si y sólo si», respectivamente. En ocasiones usaremos los símbolos «ssi» o «sii» para abreviar la frase «si y sólo si». Debido a los propósitos del curso, omitiremos algunas demostraciones, las cuales el lector puede consultar en [2] o en [**?**].

Finalmente, es importante señalar que para un desarrollo apropiado del curso es necesario que tengas los conocimientos de aritmética, álgebra, trigonometría y geometría analítica que se ven en las escuelas del nivel básico.

## 0.2. Desarrollo del contenido

¡Bienvenido al mundo de las matemáticas!

Iniciamos con la clase digital 1.

### *0.2.1. Funciones*

Para empezar ¿qué es una función? Todos hemos oído frases como «el precio del maíz está en función del clima» o «el desarrollo de un país está en función de su política educativa». En las frases anteriores la palabra «función» significa dependencia. Informalmente, una función es una relación de dependencia entre objetos. A continuación, damos la definición precisa de función.

---

**Definition 1. (Función)** Sean $A$ y $B$ conjuntos no vacíos. Una *función* $f$ de $A$ en $B$ es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$.

Si $x \in A$, al único elemento de $B$ que $f$ asigna a $x$ lo denotaremos por $f(x)$. A $f(x)$, que se lee «f de x», le llamaremos el valor de $f$ en $x$. Al conjunto $A$ le llamaremos el dominio de $f$ y lo denotaremos por $\operatorname{dom}(f)$. Al conjunto $B$ le llamaremos el codominio de $f$ y lo denotaremos por $\operatorname{cod}(f)$. Definimos el *rango* de $f$ como el conjunto

$$\operatorname{ran}(f) = \{f(x) : x \in \operatorname{dom}(f)\}.$$

Finalmente, escribiremos $f : A \to B$ para denotar que $f$ es una función de $A$ en $B$.

---

De aquí en adelante, a menos que se especifique lo contrario, trabajaremos con *funciones reales de una variable real*, es decir con funciones $f : A \to B$, donde $A$ y $B$ son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. En consecuencia, si el dominio de una función es un intervalo, supondremos que ese intervalo es no vacío.

---

*Example 1.* Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \mathbb{N}$. Definimos una función $f$ de $A$ a $B$ mediante la tabla de la figura 0.1. Según la tabla, la función $f$ asigna al

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 5 |
| 3 | 10 |
| 4 | 17 |
| 5 | 26 |

**Figura 0.1** Regla de correspondencia de la función $f$.

número 1 del conjunto $A$ el número 2 del conjunto $B$, al número 2 del conjunto $A$ el número 5 del conjunto $B$, etc. Así $f(1) = 2$, $f(2) = 5$, $f(3) = 10$, $f(4) = 17$ y $f(5) = 26$. Notemos que en este caso

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(f) &= \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ \operatorname{cod}(f) &= \mathbb{N}, \\ \operatorname{ran}(f) &= \{2, 5, 10, 17, 26\}. \end{aligned}$$

---

En ocasiones usaremos otras letras para denotar a una función y no solamente la letra $f$.

*Example 2.* Definimos una función $g$ de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{R}$ de la siguiente manera. Si $x \in \mathbb{Z}$ definimos $g(x)$ como $2x$. Así $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(-1) = -2$, etc. La tabla la figura 0.2 muestra los valores que la función $g$ asigna a varios números $x$. Nótese que en este caso la regla de correspondencia de la función $g$ está dada por la ecuación $g(x) = 2x$. Notemos que en este caso

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| $0$ | $0$ |
| $1$ | $2$ |
| $-1$ | $-2$ |
| $2$ | $4$ |
| $-2$ | $-4$ |
| $3$ | $6$ |
| $-3$ | $-6$ |

**Figura 0.2** Regla de correspondencia de la función $g$.

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(g) &= \mathbb{Z}, \\ \operatorname{cod}(g) &= \mathbb{R}, \\ \operatorname{ran}(g) &= \{x : x \text{ es un número par}\}. \end{aligned}$$

---

*Example 3.* **(Una regla de correspondencia que no es una función)** Tomemos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \mathbb{R}$. Definimos ahora a una regla de correspondencia $f$ de $A$ a $B$ mediante la tabla de la figura 0.3. En este caso la regla

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 5 |
| 3 | 5 |
| 3 | 4 |
| 4 | 5 |
| 5 | 6 |

**Figura 0.3** Regla de correspondencia $f$ que no es una función.

de correspondencia $f$ entre los conjuntos $A$ y $B$ de la tabla anterior no es una función, pues al número 3 no le está asignando un único valor, sino dos, el número 5 y el número 4.

---

Para verificar la igualdad de dos funciones tenemos el siguiente criterio.

**Criterio (para la igualdad de funciones)** Dos funciones $f$ y $g$ son iguales si se cumple lo siguiente:

(a) $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(g)$.
(b) Las reglas de correspondencia de $f$ y de $g$ coinciden.
(c) $\operatorname{codom}(f) = \operatorname{codom}(g)$.

Por el criterio anterior, aunque dos funciones tengan la misma regla de correspondencia, si sus dominios o codominios difieren, entonces las funciones serán diferentes.

---

**Convenciones**

1. Es usual escribir solamente la regla de correspondencia de una función $f$ sin especificar su dominio y codominio. En este caso entenderemos lo siguiente:

   *a*) El dominio de $f$ es el conjunto de todos los números $x$ para los cuales la regla de correspondencia de $f$ tiene sentido. Por ejemplo, si escribimos $f(x) = x + 1$ entenderemos que el dominio de $f$ es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$, pues $x + 1$ tiene sentido para todo número real $x$. Como otro ejemplo, si escribimos $g(x) = 1/x$, entenderemos que el dominio de $g$ es el conjunto de todos los números reales distintos de 0, es decir, $\operatorname{dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pues la expresión algebraica $1/x$ tiene sentido para todo número real, excepto 0, ya que no se vale dividir por cero.
   *b*) El codominio de $f$ es cualquier conjunto que contenga al rango de $f$. Por lo general, a menos que se indique lo contrario, tomaremos al conjunto $\mathbb{R}$ como el codominio de $f$.

2. Cuando se define una función mediante una ecuación, por ejemplo $f(x) = x^2$, es común omitir la letra $f$ y decir simplemente que la expresión algebraica que define a $f$ es una función, por ejemplo, en lugar de decir la

frase «la función $f$ definida como $f(x) = x^2$», simplemente diremos «la función $x^2$» .

---

## 0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

El estudio del cálculo requiere de un conocimiento adecuado del concepto de función, de su dominio y de su rango. En esta primera clase conociste estos conceptos, en las próximas clases aprenderás a calcularlos. En esta primera clase no vimos como calcular el rango de una función, para facilitar su cálculo, necesitaremos primero el concepto de gráfica de una función que veremos más adelante.

¡Espero hayas disfrutado esta primera clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

# Referencias


1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.