Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 2

(Tipos de funciones)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 2!

En esta clase digital conocerás varios tipos de funciones con las que trabajarás a lo largo del curso. Las funciones son una herramienta para estudiar una gran variedad de fenómenos de diversa índole, así que estar familiarizados con varios tipos de ellas es siempre recomendable. ¡iniciamos!

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 2.

0.2.1. Tipos de Funciones

En este curso trabajaremos por lo general con los siguientes tipos de funciones: Polinomios, funciones racionales, funciones trigonométricas, la función exponencial, la función logaritmo natural, la función raíz n-ésima y las funciones radicales (la función raíz n-ésima es un caso particular de las funciones radicales). Más adelante veremos como mezclar estas funciones para obtener nuevas funciones.

Polinomios

Una función P es un *polinomio* (de grado n) si existen números reales $a_0, a_1, ..., a_n$ con $a_n \neq 0$ tales que

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Funciones Racionales

Una función R es una *función racional* si

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Funciones Trigonométricas

Las funciones *trigonométricas* son las funciones $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$ y $\csc(x)$. Más adelante, en el curso de Cálculo II, se dará la definición precisa de estas funciones.

La Función Logaritmo Natural y la Función Exponencial

La *función logaritmo* (natural) es la función $\ln(x)$ y la *función exponencial* es la función e^x. Más adelante, en el curso de Cálculo II, se dará la definición precisa de estas funciones. [1]

La Función Raíz n-ésima

[1] Para dar una definición precisa de la función $\ln(x)$ se necesita tener conocimiento de la integral de Riemann y sus propiedades, lo cual se ve en un curso de Cálculo Integral. La función exponencial e^x es la inversa de la función $\ln(x)$. El lector interesado en ahondar en estos temas puede consultar por ejemplo [**?**].

En aritmética se define una *raíz cuadrada* de un número x como un número y tal que $y^2 = x$. Notemos que si y es una raíz cuadrada de x, entonces $-y$ también lo es, pues $(-y)^2 = y^2 = x$. Por ejemplo, una raíz cuadrada de 9 es 3, pues $3^2 = 9$, y otra raíz cuadrada de 9 es -3, pues $(-3)^2 = 9$. Definimos la *función raíz cuadrada* como la función f dada por

$$f(x) = \sqrt{x},$$

donde $\sqrt{x}$ representa la raíz cuadrada no negativa del número x. Es importante señalar que no existe la raíz cuadrada de números negativos (véase por ejemplo [**?**]).

En general, dado un número natural n, se define una *raíz n-ésima* de un número x como un número y tal que $y^n = x$. Por ejemplo, la raíz cúbica de 8 es 2 pues $2^3 = 8$. Notemos que si n es par y y es una raíz n-ésima de x, entonces $-y$ también lo es. Por otra parte, si n es impar y y es una raíz n-ésima de x, entonces esta es única. Definimos la *función raíz n-ésima* como la función f dada por

$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

donde $\sqrt[n]{x}$ representa la raíz n-ésima no negativa del número x cuando n es par, y la raíz n-ésima de x cuando n es impar. Igual que en el caso de la raíz cuadrada (caso $n = 2$), si $x < 0$ y n es par, entonces no existe la raíz n-ésima de x.

Funciones Radicales
Una función R es una *función radical* si

$$R(x) = \sqrt[n]{f(x)}$$

para algún número natural n y alguna función f. Notemos que la función raíz n-ésima es un caso particular de las funciones radicales.

La tabla de la figura 0.1 señala el dominio y rango de las funciones enunciadas en esta sección.

Función	Dominio	Rango
Polinomio $P(x)$	$\mathbb{R}$	Depende de P
Función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$	$\{x : Q(x) \neq 0\}$	Depende de P y Q
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
$\tan(x)$	$\left\{x : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$
$\cot(x)$	$\{x : x \neq \pi + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sec(x)$	$\left\{x : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc(x)$	$\{x : x \neq \pi + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\ln(x)$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
$\sqrt[n]{x}$	$[0, \infty)$ si n es par y $\mathbb{R}$ si n es impar	$[0, \infty)$ si n es par y $\mathbb{R}$ si n es impar
Función radical $\sqrt[n]{f(x)}$	$\{x : f(x) \geq 0\}$ si n es par y $\operatorname{dom}(f)$ si n es impar	Depende de f.

Figura 0.1 Algunos tipos de funciones y su dominio.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

En esta clase se consideraron las funciones con las que usualmente trabajaremos a lo largo del curso. Conocer sus propiedades es esencial para progresar en el estudio del cálculo.

¡Espero hayas disfrutado esta primera clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.