Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 4

(Cálculo del dominio de una función)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 4!

En esta clase digital aprenderás a calcular el dominio de una función, tarea esencial para comprender el comportamiento de la función. Sin más preámbulos, ¡iniciamos!

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 4.

0.2.1. Cálculo del Dominio de una Función

Dedicaremos toda esta sección al cálculo del dominio de una función.

A la hora de calcular el dominio de una función es útil tener presente los siguientes puntos.

(a) No es válido dividir por cero y no existen las raíces n-ésimas de números negativos cuando n es par.

(b) Conocemos el dominio de algunas funciones de uso común (véase la tabla de la figura **??**).

(c) Dadas dos funciones f y g se tiene que

$$\operatorname{dom}(f+g)=\operatorname{dom}(f-g)=\operatorname{dom}(fg)=\operatorname{dom}(f)\cap\operatorname{dom}(g),$$

$$\operatorname{dom}\left(\frac{f}{g}\right)=\operatorname{dom}(f)\cap\operatorname{dom}(g)\cap\{x:g(x)\neq 0\}$$

y

$$\operatorname{dom}(f\circ g)=\{x:x\in\operatorname{dom}(g)\ \text{ y }\ g(x)\in\operatorname{dom}(f)\}.$$

Example 1. Calcula el dominio de la función

$$\frac{1}{x-3}.$$

Solución Como no es válido dividir por cero, el dominio de la función $1/(x-3)$ es el conjunto de todos los números reales, excepto el número 3, es decir, el conjunto $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Example 2. Calcula el dominio de la función

$$\frac{1}{x+5}.$$

Solución Como no es válido dividir por cero, el dominio de la función $1/(x+5)$ es el conjunto de todos los números reales, excepto el número -5, es decir, el conjunto $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$.

Example 3. Calcula el dominio de la función

$$\sqrt{x-7}.$$

Solución Según la tabla de la figura **??**, el dominio de una función radical $\sqrt[n]{f(x)}$ es el conjunto $\{x : f(x) \geq 0\}$ si n es par (esto se debe a que no existen las raíces n-ésimas de números negativos cuando n es par). Así, el dominio de la función $\sqrt{x-7}$ es el conjunto

$$\begin{aligned}\{x : x-7 \geq 0\} &= \{x : x \geq 7\} \\ &= [7, \infty).\end{aligned}$$

Example 4. Calcula el dominio de la función

$$\sqrt{x+2}.$$

Solución El dominio de la función $\sqrt{x+2}$ es el conjunto

$$\begin{aligned} \{x : x+2 \geq 0\} &= \{x : x \geq -2\} \\ &= [-2, \infty) . \end{aligned}$$

Example 5. Calcula el dominio de la función

$$\frac{1}{\sqrt{x-4}}.$$

Solución Puesto que no existen las raíces cuadradas de números negativos y no se vale dividir por cero, debemos de considerar los números x tales que $x-4 \geq 0$ y $x \neq 4$, es decir, los x tales que $x-4>0$. Así, el dominio de la función $1/\sqrt{x+2}$ es el conjunto

$$\begin{aligned} \{x : x-4 > 0\} &= \{x : x > 4\} \\ &= (4, \infty) . \end{aligned}$$

Example 6. Calcula el dominio de la función

$$\frac{1}{\sin(x)}.$$

Solución Puesto que no se vale dividir por cero y $\sin(x) = 0$ en los números x de la forma $\pi + k\pi$ con k entero, entonces el dominio de la función $1/\sin(x)$ es el conjunto

$$\{x : x \neq \pi + k\pi \text{ con } k \text{ entero}\}.$$

Example 7. Calcula el dominio de la función

$$\frac{1}{\cos(x)}.$$

Solución Puesto que no se vale dividir por cero y $\cos(x) = 0$ en los números x de la forma $(\pi/2) + k\pi$ con k entero, entonces el dominio de la función $1/\cos(x)$ es el conjunto

$$\left\{x : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \text{ entero}\right\}.$$

Example 8. Calcula el dominio de la función

$$h(x) = \cos(x) + \sqrt{x}.$$

Solución Sean $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Según la tabla de la figura **??** se tiene que $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$ y que $\operatorname{dom}(g) = [0, \infty)$. Por otra parte, sabemos que $\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$. Así,

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(h) &= \operatorname{dom}(f+g) \\ &= \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \\ &= \mathbb{R} \cap [0, \infty) \\ &= [0, \infty). \end{aligned}$$

Example 9. Calcula el dominio de la función

$$h(x) = \ln(x-2)\sqrt{5-x}.$$

Solución Sean $f(x) = \ln(x-2)$ y $g(x) = \sqrt{5-x}$. Como la función $\ln(x)$ esta definida para $x > 0$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(f) &= \{x : x-2 > 0\}\\ &= \{x : x > 2\}\\ &= (2,\infty).\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(g) &= \{x : 5-x \geq 0\}\\ &= \{x : 5 \geq x\}\\ &= (-\infty,5].\end{aligned}$$

Luego, puesto que $\operatorname{dom}(fg) = \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(h) &= \operatorname{dom}(fg)\\ &= \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)\\ &= (2,\infty) \cap (-\infty,5]\\ &= (2,5].\end{aligned}$$

Example 10. Calcula el dominio de la función

$$h(x) = \frac{3x^2-2x+7}{\sqrt{x-3}}.$$

Solución Sean $f(x) = 3x^2-2x+7$ y $g(x) = \sqrt{x-3}$. Como f es un polinomio, entonces $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$. Por otra parte $\operatorname{dom}(g) = [3,\infty)$. Luego, puesto que $\operatorname{dom}(f/g) = \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \cap \{x : g(x) \neq 0\}$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(h) &= \operatorname{dom}\left(\frac{f}{g}\right)\\ &= \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \cap \{x : g(x) \neq 0\}\\ &= \mathbb{R} \cap [3,\infty) \cap (3,\infty)\\ &= (3,\infty).\end{aligned}$$

Example 11. Calcula el dominio de la función

$$f(x) = \ln(x-2)\sqrt{5-x} + \frac{3x^2-2x+7}{\sqrt{x-3}}.$$

Solución Sean $h_1(x) = \ln(x-2)\sqrt{5-x}$ y $h_2(x) = \left(3x^2-2x+7\right)/\sqrt{x-3}$. Sabemos por los dos ejemplos anteriores que $\operatorname{dom}(h_1) = (2,5]$ y que $\operatorname{dom}(h_2) = (3,\infty)$. Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dom}(f) &= \operatorname{dom}(h_1+h_2) \\
&= \operatorname{dom}(h_1) \cap \operatorname{dom}(h_2) \\
&= (2,5] \cap (3,\infty) \\
&= (3,5].
\end{aligned}$$

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

El cálculo del dominio de una función requiere una base sólida de matemáticas elementales, por ejemplo, de aritmética, álgebra y geometría analítica. En esta clase usamos técnicas y herramientas de esas áreas del conocimiento para encontrar tales dominios. Es importante comprender tales técnicas y herramientas para continuar de manera satisfactoria con el resto del curso.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.