



Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 5
(Gráfica de una función)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 5!

En esta clase digital estudiarás a la gráfica de una función, herramienta fundamental para visualizar a las funciones. Conocerás o recordarás a las gráficas de funciones elementales y comunes como las funciones constantes, rectas, parábolas, hipérbolas, la función raíz cuadrada, funciones trigonométricas, la función logaritmo natural, la función exponencial y otras funciones. Aprenderás el criterio de la recta vertical para determinar si una curva en el plano es la gráfica de una función. Veremos varios ejemplos del uso de este criterio.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 5.

0.2.1. Gráfica de una función

Definition 1. (Gráfica de una función) Sea f una función. Definimos la gráfica de f como el conjunto

$$\{(x, f(x)) : x \in \text{dom}(f)\}.$$

Las figuras siguientes muestran la gráfica de algunas de las funciones más comunes.

Funciones constantes $f(x) = c$.

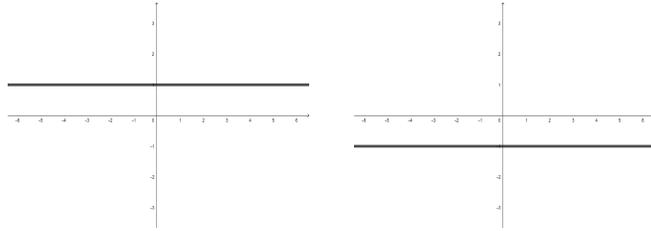


Figura 0.1 Gráfica de una función constante $f(x) = c$ en los casos en que $c = 1$ y $c < -1$, respectivamente.

Funciones de la forma $f(x) = mx + b$. En este caso la gráfica de la función f es una recta de pendiente m y cuya intersección con el eje X es el punto $(0, b)$.

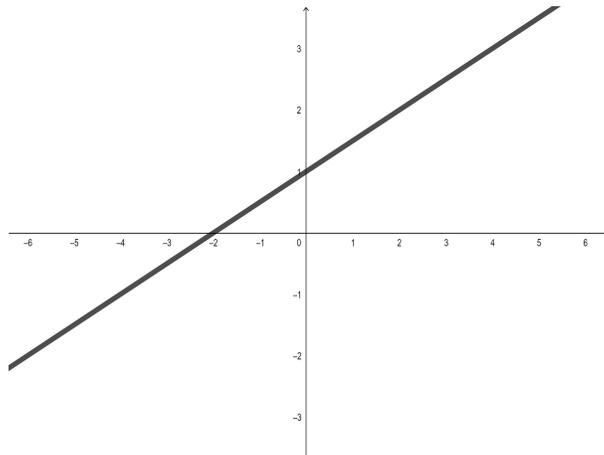


Figura 0.2 Gráfica de la función $f(x) = mx + b$ con $m = 2$ y $b = 1$.

Funciones potencia $f(x) = x^n$.

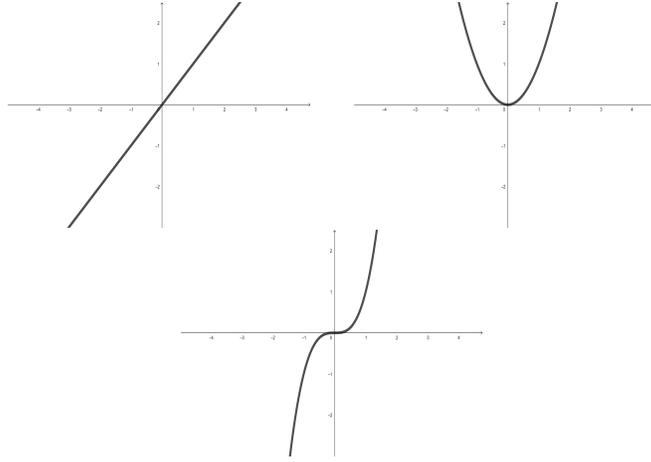


Figura 0.3 Gráficas de las funciones x , x^2 y x^3 respectivamente.

Funciones de la forma $f(x) = 1/x^n$.

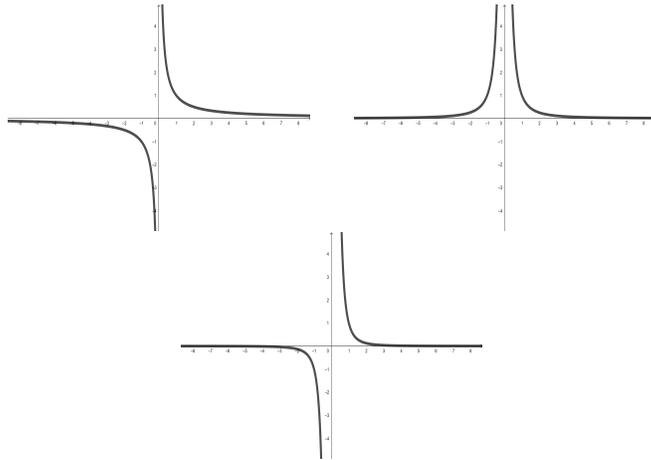


Figura 0.4 Gráfica de las funciones $1/x$, $1/x^2$ y $1/x^3$, respectivamente.

Función raíz cuadrada \sqrt{x} . Función raíz cuadrada \sqrt{x} .

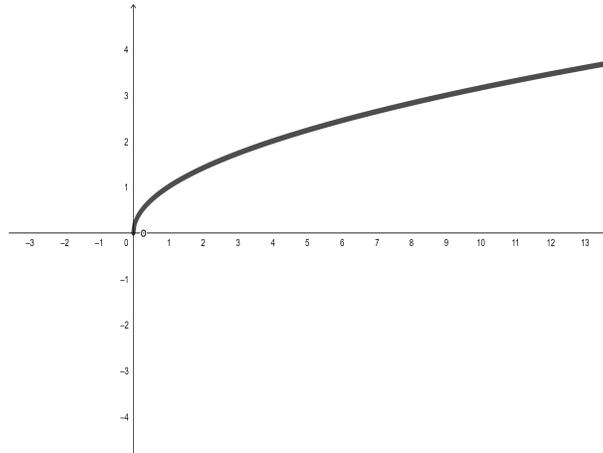


Figura 0.5 Gráfica de la función \sqrt{x} .

Funciones trigonométricas

Función logaritmo natural $\ln(x)$.

Función exponencial e^x .

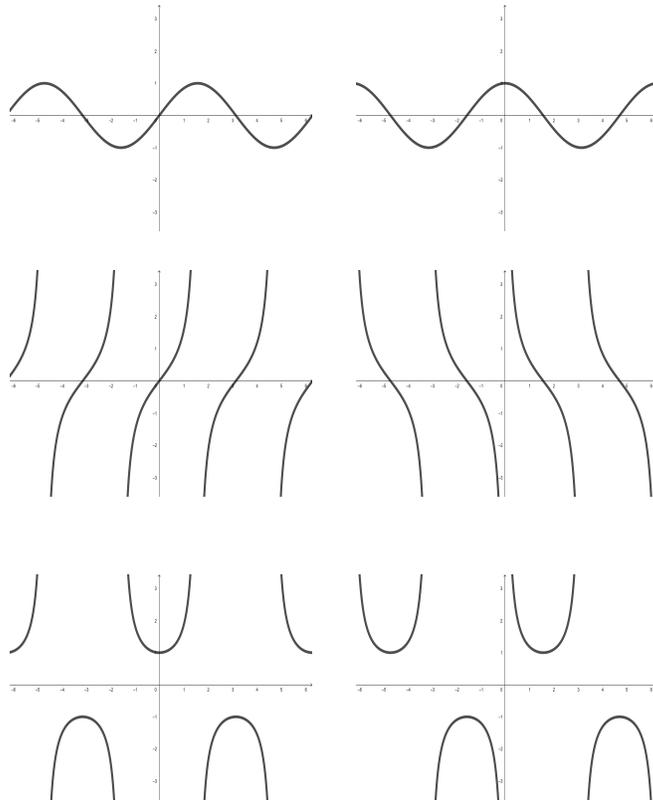


Figura 0.6 Gráfica de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, respectivamente.

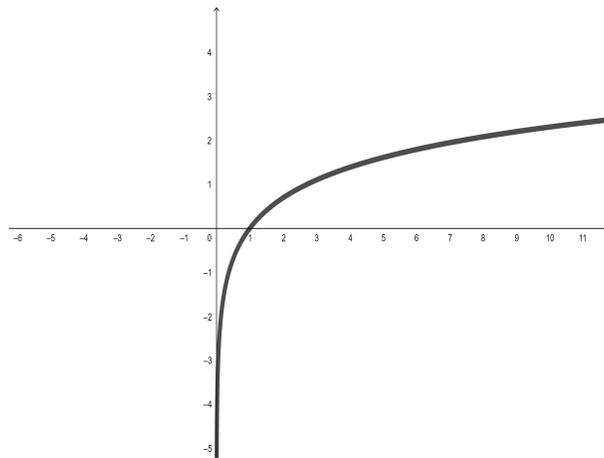


Figura 0.7 Gráfica de la función $\ln(x)$.

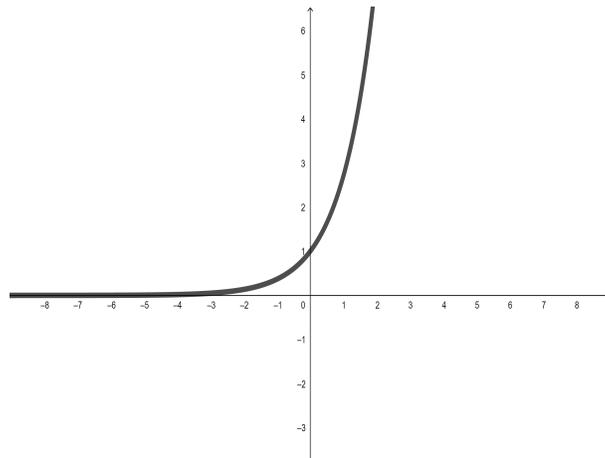


Figura 0.8 Gráfica de la función e^x .

Gráfica de otras funciones

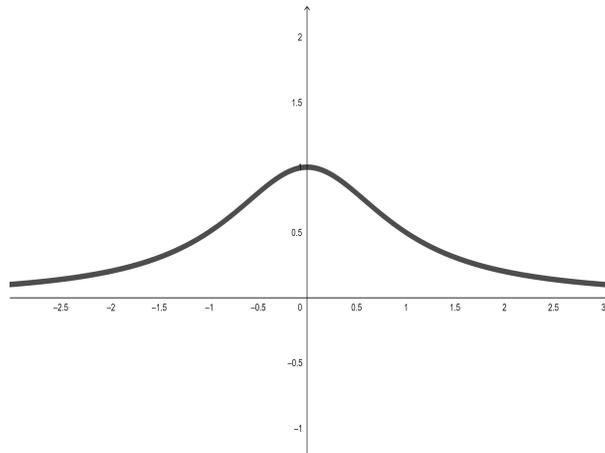


Figura 0.9 Gráfica de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

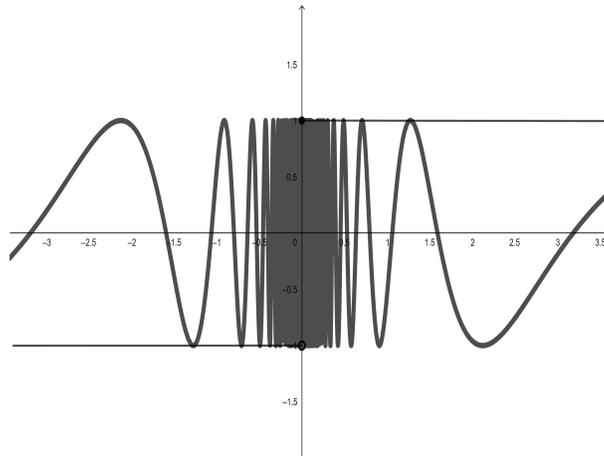


Figura 0.10 Gráfica de $f(x) = \sin\left(\frac{10}{x}\right)$

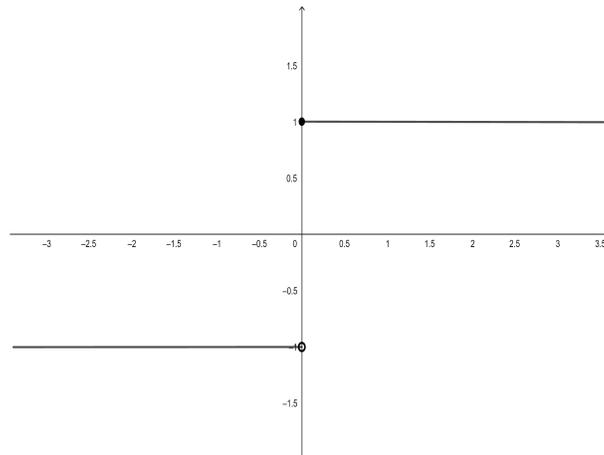


Figura 0.11 Gráfica de $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Hasta ahora, a partir de la regla de correspondencia de una función hemos encontrado su gráfica. Surge la siguiente pregunta, ¿toda curva en el plano es la gráfica de una función? La respuesta es que no. El siguiente criterio nos ayudará a determinar si una curva en el plano es la gráfica de una función.

Proposition 1. (*Criterio de la recta vertical para determinar si una curva en el plano es la gráfica de una función*) Sea α una curva en el plano. Entonces α es la gráfica de cierta función si y sólo si toda recta vertical intersecta a la curva α a lo más en un punto.

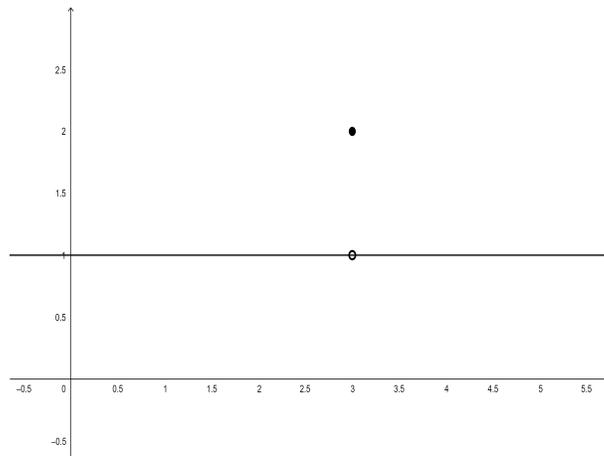


Figura 0.12 Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 3 \\ 2, & \text{si } x = 3. \end{cases}$

Example 1. Considera la curva α de la figura 0.13, es decir, α es la circunferencia con centro en el origen y radio 1. ¿Es α la gráfica de alguna función f ? La respuesta es que no, pues por ejemplo la recta $x = 0$ intersecta a α en más de un punto, a saber, en los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

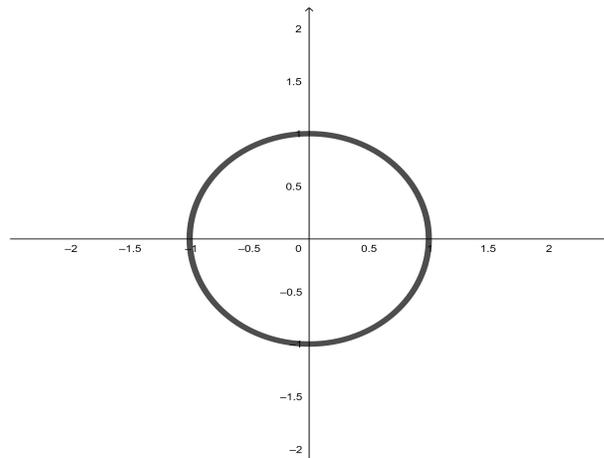


Figura 0.13 La curva α no es la gráfica de una función.

Example 2. Considera ahora la curva β de la figura 0.14. ¿Es β la gráfica de alguna función f ? La respuesta es que no, pues por ejemplo la recta $x = 1$ intersecta a β en dos puntos.

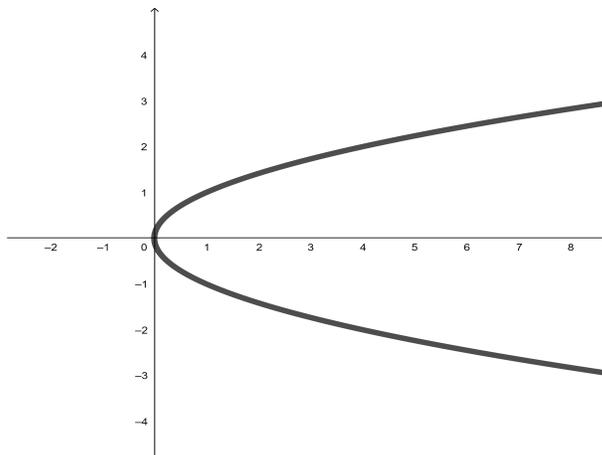


Figura 0.14 La curva β no es la gráfica de una función.

Example 3. Como otro ejemplo, considera la curva γ de la figura 0.15. ¿Es γ la gráfica de alguna función f ? La respuesta es que no, pues por ejemplo la recta $x = 0$ intersecta a γ en más de un punto.

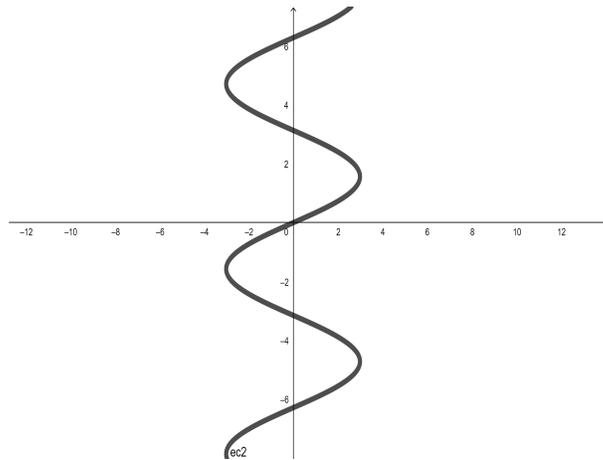


Figura 0.15 La curva γ no es la gráfica de una función.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

Como habrás apreciado, en ocasiones la gráfica de una función muestra algunos aspectos de una función que a primera vista son desconocidos. Espero que te hayas familiarizado con la gráfica de las funciones que vimos en esta clase, la mayoría de ellas las usaremos a lo largo del curso.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos*. Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo*. Editorial Interamericana, 1998.