Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 6

(Funciones pares e impares. Transformaciones elementales de funciones.)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 6!

En esta pequeña clase digital estudiarás a las funciones pares e impares. El conocer si una función es par o impar te ayudará a visualizar mejor a la función, y en ocasiones te simplificará algunos cálculos, como lo verás, por ejemplo, en Cálculo Integral. Además de las funciones pares e impares, verás ejemplos de como la gráfica de una función se transforma con las llamadas «transformaciones elementales sobre funciones». El conocimiento de estas «transformaciones elementales» te permitirán conocer la gráfica de un buen número de funciones a partir de funciones conocidas.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 6.

0.2.1. Funciones Pares e Impares

En esta sección hablaremos de las funciones pares e impares. Geométricamente, una función es par si su gráfica se refleja en el eje Y, y una función es impar si su gráfica se refleja en el origen. Por ejemplo las funciones x^2 y $\cos(x)$ son pares y las funciones x^3 y $\sin(x)$ son impares (véase las figuras 0.1 y 0.2). Analíticamente la definición de función pare e impar es la siguiente.

Definition 1. (Funciones pares e impares)

(a) Diremos que una función f es par si

$$f(x) = f(-x) \text{ para todo } x \in \operatorname{dom}(f).$$

(b) Diremos que una función f es impar si

$$f(x) = -f(-x) \text{ para todo } x \in \mathrm{dom}(f).$$

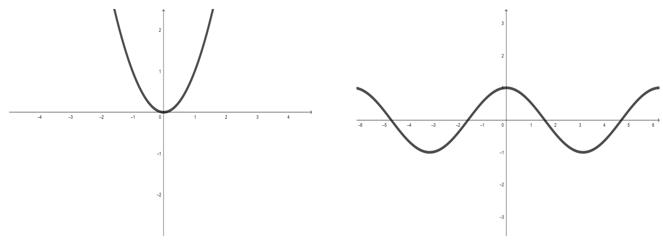

Figura 0.1 Las funciones x^2 y $\cos(x)$ son pares.

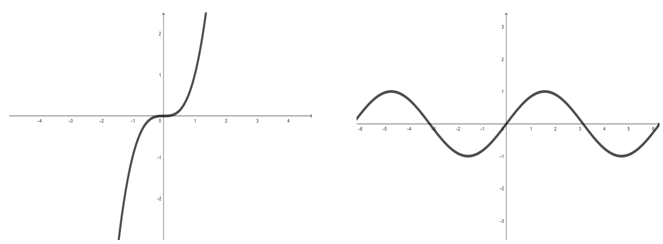

Figura 0.2 Las funciones x^3 y $\sin(x)$ son impares.

Example 1. La función valor absoluto $|x|$ es par, pues $|x| = |-x|$ para todo x. Por otra parte la función $|x|$ no es impar, pues por ejemplo $|3| \neq -|-3|$. $\square$

Example 2. Como ya comentamos anteriormente, la función $f(x) = x^3$ es una función impar. Por otra parte, la función f no es par, pues por ejemplo $f(1) \neq -f(-1)$.

Example 3. La función $f(x) = x^3 + 1$ no es par, pues por ejemplo $f(-1) \neq f(1)$. La función f tampoco es impar, pues por ejemplo $f(0) \neq -f(-0)$. Dibuja la gráfica de f y verifica que no es simétrica respecto al eje Y, ni respecto al origen). $\square$

¿Existirán funciones que son tanto pares como impares? En caso afirmativo, ¿cuáles son?

0.2.2. Transformaciones Elementales de Funciones

A partir de funciones cuya gráfica es conocida se puede construir la gráfica de funciones más complicadas mediante transformaciones elementales de funciones. Las transformaciones elementales de funciones se resumen en la tabla de la figura 0.3.

Función	**Transformación**	**Resultado**
$f(x)$	$f(x)+c$	La gráfica de f se traslada c unidades hacia arriba si $c>0$ o hacia abajo si $c<0$.
$f(x)$	$f(x+c)$	La gráfica de f se traslada c unidades a la derecha si $c<0$ o hacia la izquierda si $c>0$.
$f(x)$	$-f(x)$	La gráfica de f se refleja en el eje X.
$f(x)$	$f(-x)$	La gráfica de f se refleja en el eje Y.

Figura 0.3 Transformaciones elementales de funciones

Las seis figuras siguientes muestran el efecto de las transformaciones elementales sobre la gráfica de la función $\sqrt{x}$.

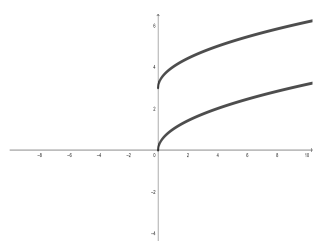

Figura 0.4 Gráficas de las funciones $\sqrt{x}$, $\sqrt{x}+3$

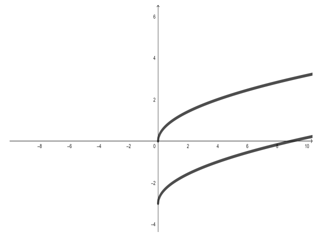

Figura 0.5 Gráficas de las funciones $\sqrt{x}$, $\sqrt{x}-3$

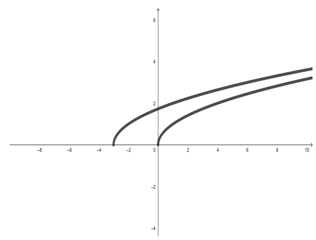

Figura 0.6 Gráficas de las funciones $\sqrt{x}$ y $\sqrt{x+3}$

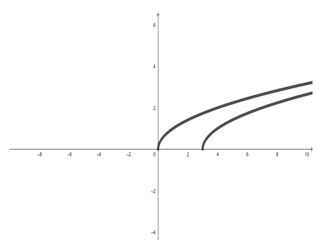

Figura 0.7 Gráficas de las funciones $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-3}$

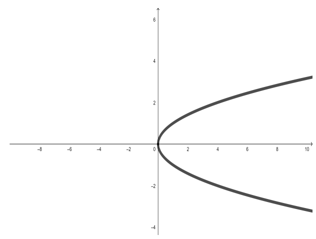

Figura 0.8 Gráficas de las funciones $\sqrt{x}$ y $-\sqrt{x}$

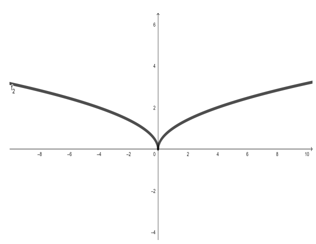

Figura 0.9 Gráficas de las funciones $\sqrt{x}$ y $\sqrt{-x}$

Example 4. Bosqueja la gráfica de la función

$$f(x) = 5 - \sqrt{3 - x}$$

Solución Notemos que podemos obtener la función f, a partir de la función $\sqrt{x}$, mediante transformaciones elementales de funciones de la siguiente manera:

$$\sqrt{x} \to \sqrt{-x} \to \sqrt{3-x} \to -\sqrt{3-x} \to 5-\sqrt{3-x}.$$

En consecuencia, la gráfica de f es el resultado final de la secuencia de gráficas (de izquierda a derecha) que aparece en la figura 4. $\square$

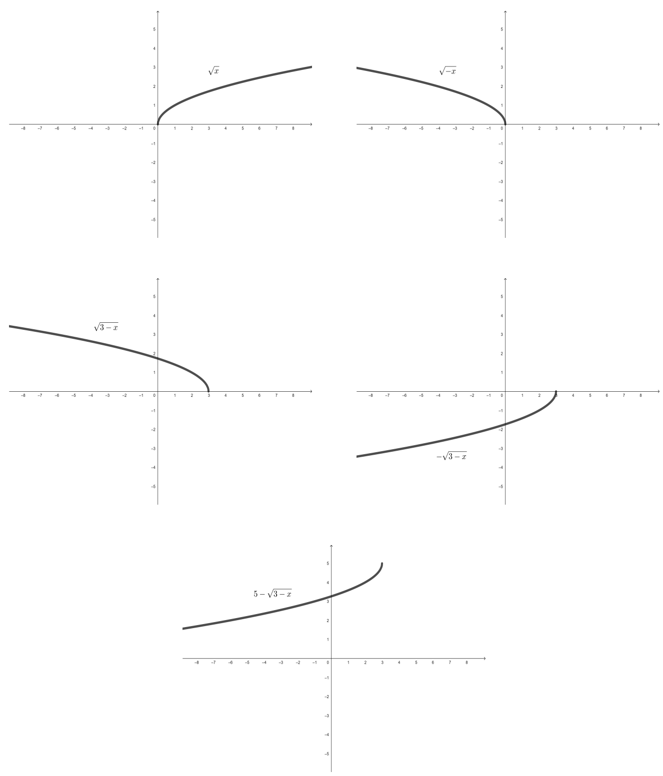

Figura 0.10 Secuencia de gráficas (de izquierda a derecha) que muestra la transformación de función x^2 en la función f, utilizando transformaciones elementales sobre funciones.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

Como comentamos anteriormente, el conocimiento de que una función es par o impar te ayudará a visualizar mejor a la función, además de que te puede simplificar algunos cálculos. Como apreciarás en los ejercicios, el conocimiento de las transformaciones elementales sobre funciones te ayudará a encontrar gráficas de funciones aparentemente complicadas.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos*. Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo*. Editorial Interamericana, 1998.