Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 7

(Cálculo del rango de una función)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 7!

En esta clase digital aprenderás técnicas, entre ellas el criterio de la recta horizontal, para encontrar el rango el rango de una función.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 7.

0.2.1. Cálculo del Rango de una Función

En ocasiones, encontrar o calcular el rango de una función f, es decir, encontrar el conjunto

$$\{f(x) : x \in \operatorname{dom}(f)\},$$

puede ser una tarea sencilla y algunas veces no tanto. Veamos algunos ejemplos.

Exercise 1. Calcula el rango de la función

$$f(x) = 2x + 1.$$

Solución El rango de f es el conjunto de los y tales que

$$y = 2x + 1$$

para algún $x \in \operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$, es decir, el conjunto de los y tales que

$$x = \frac{y-1}{2} \tag{0.1}$$

para algún $x \in \mathbb{R}$. Puesto que la ecuación (0.1) genera un número real x para cada valor de y, entonces todo número y pertenece al rango de f, es decir

$$\operatorname{ran}(f) = \mathbb{R}. \ \square$$

Example 1. Calcula el rango de la función

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2.$$

Solución El rango de f es el conjunto de los y tales que

$$y = \frac{1}{x} + 2$$

para algún $x \in \operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, es decir, el conjunto de los y tales que

$$x = \frac{1}{y-2} \tag{0.2}$$

para algún $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Puesto que la ecuación (0.2) genera un número real x distinto de 0 para cada valor de y distinto de 2, entonces todo número y distinto de 2 pertenece al rango de f, es decir

$$\operatorname{ran}(f) = \mathbb{R}\setminus\{2\}. \ \square$$

Las soluciones de los ejemplos anteriores son aplicaciones del artificio siguiente para calcular el rango de una función.

Proposition 1. ***(Artificio para calcular el rango de una función)*** *Sea f una función. Si de la ecuación*

$$y = f(x) \tag{0.3}$$

podemos despejar x en función de y para obtener la ecuación

$$x = g(y), \tag{0.4}$$

entonces[1]

$$ran(f) = \{y \in dom(g) : f(g(y)) = y\}. \tag{0.5}$$

Example 2. Calcula el rango de la función

$$f(x) = \frac{3}{x-1} + 2.$$

Solución Sea

$$y = \frac{3}{x-1} + 2. \tag{0.6}$$

Al despejar x en la ecuación (0.6) obtenemos que

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{y-2} + 1 \\ &=: g(y) \end{aligned}$$

Claramente $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Además

$$\begin{aligned} & f(g(y)) = y \\ \Leftrightarrow & \frac{3}{\left[\frac{3}{y-2} + 1\right] - 1} + 2 = y \\ \Leftrightarrow & \; y = y. \end{aligned}$$

Así, $\mathrm{ran}(f)$ es el conjunto de todos los $y \neq 2$ tales que $y = y$, es decir,

$$\mathrm{ran}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}. \;\square$$

[1] Nótese que el rango de f está contenido en el dominio de g, sin embargo, pueden ser diferentes.

Example 3. Calcula el rango de la función

$$f(x) = \sqrt{x-7}.$$

Solución Sea

$$y = \sqrt{x-7}. \tag{0.7}$$

Al despejar x en la ecuación (0.7) obtenemos que

$$\begin{aligned} x &= y^2 + 7 \\ &=: g(y) \end{aligned}$$

Claramente $\operatorname{dom}(g) = \mathbb{R}$. Además

$$\begin{aligned} & f(g(y)) = y \\ & \Leftrightarrow \sqrt{g(y) - 7} = y \\ & \Leftrightarrow \sqrt{[y^2+7] - 7} = y \\ & \Leftrightarrow \sqrt{y^2} = y \\ & \Leftrightarrow |y| = y. \end{aligned}$$

Así, $\operatorname{ran}(f)$ es el conjunto de todos los y tales que $|y| = y$, es decir,

$$\operatorname{ran}(f) = [0, \infty). \ \square$$

Desafortunadamente no siempre podemos usar el artificio de la proposición 1, por ejemplo, si $f(x) = \sin(x)$, no podemos despejar x en función de y en la ecuación $y = \sin(x)$. En estos casos, el siguiente criterio, el cual se deduce de la definición del rango de una función, nos ayudará a encontrar el rango de f si conocemos con exactitud su gráfica. Afortunadamente existen programas de software libre que permiten encontrar la gráfica de una función con bastante precisión.

Proposition 2. ***(Criterio de la recta horizontal para encontrar valores en el rango de una función)*** *Sea f una función. Entonces $c \in ran(f)$ si y sólo si la recta horizontal $y = c$ intersecta a la gráfica de f.*

Example 4. Según la gráfica de la función $f(x) = x^2$, toda recta de la forma $y = c$ con $c \geq 0$ intersecta a la gráfica de f y toda recta de la forma $y = c$ con $c < 0$ no la intersecta. Así $\operatorname{ran}(f) = [0, \infty)$.

Example 5. Según la gráfica de la función $f(x) = x^3$, toda recta de la forma $y = c$ con $c \in \mathbb{R}$ intersecta a la gráfica de f. Así $\operatorname{ran}(f) = \mathbb{R}$.

Example 6. Según la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$, toda recta de la forma $y = c$ con $c \geq 0$ intersecta a la gráfica de f y toda recta de la forma $y = c$ con $c < 0$ no la intersecta. Así $\operatorname{ran}(f) = [0, \infty)$.

Example 7. Según la gráfica de la función $f(x) = \sin(x)$, toda recta de la forma $y = c$ con $-1 \leq c \leq 1$ intersecta a la gráfica de f y toda recta de la forma $y = c$ con $c < 1$ o $c > 1$ no la intersecta. Así, $\operatorname{ran}(f) = [-1, 1]$, como ya habíamos dicho en la clase digital 1.

Example 8. Según la gráfica de la función $f(x) = 1/x$, toda recta de la forma $y = c$ con $c \neq 0$ intersecta a la gráfica de f y la recta $y = 0$ no la intersecta. Así $\operatorname{ran}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Example 9. Según la gráfica de la función $f(x) = 1/1 + x^2$, toda recta de la forma $y = c$ con $0 < c \leq 1$ intersecta a la gráfica de f y toda recta de la forma $y = c$ con $c \leq 0$ o $c > 1$ no la intersecta. Así $\operatorname{ran}(f) = (0, 1]$.

¡Peligrooo! Si no se conoce con exactitud la gráfica de una función f corremos el peligro de aplicar incorrectamente el criterio de la recta horizontal para encontrar valores en su rango, lo cual conducirá a un cálculo incorrecto de $\operatorname{ran}(f)$. Por ejemplo, aparentemente toda recta de la forma $y = c$ con $c \in \mathbb{R}$ intersecta a la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

(véase la figura 0.1) y en consecuencia pensaríamos de manera incorrecta que $\operatorname{ran}(f)$ es $\mathbb{R}$. Sin embargo, las rectas de la forma $y = c$, con $c \in \mathbb{I}$ no intersectan a la gráfica de f y sólo las rectas de la forma $y = c$ con $c \in \mathbb{Q}$ la intersectan. Así el rango de f es $\mathbb{Q}$ y no $\mathbb{R}$.

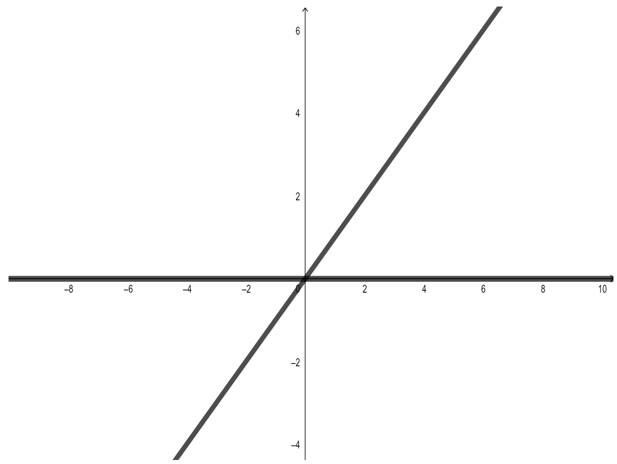

Figura 0.1 Gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Aparentemente, la gráfica de esta función consiste en dos rectas, la recta $y = x$ y la recta $y = 0$. Sin embargo esto contradice el criterio de la recta vertical para determinar si una curva en el plano es la gráfica de una función. ¿Que está pasando entonces?

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

Como habrás apreciado, el criterio de la recta horizontal para encontrar valores en el rango de una función te ayudará a a determinar su rango.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.