Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 8

(Funciones Inyectivas, Suprayectivas y Biyectivas)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 8!

En esta clase digital estudiarás a las funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas, las cuales te permitirán estudiar a mayor profundidad a las funciones. invertibles, funciones de suma importancia en el cálculo y en matemáticas. Ademas de lo anterior, estudiarás a las funciones invertibles, funciones de suma importancia en el cálculo y en mátemáticas.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 8.

0.2.1. Funciones Inyectivas, Suprayectivas y Biyectivas

Definition 1. (Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas) Sea $f : A \to B$.

(a) Diremos que f es una función *inyectiva* o *1-1* si para todo $x, y \in A$ se cumple que
$$x \neq y \text{ implica que } f(x) \neq f(y).$$

(b) Diremos que f es una función *suprayectiva* o *sobre* si $\operatorname{ran}(f) = B$, es decir, si para cada $y \in B$, existe $x \in A$ tal que
$$f(x) = y.$$

(c) Diremos que f es una función *biyectiva* si f es inyectiva y suprayectiva. En este caso diremos que f es una biyección entre los conjuntos A y B.

Según su definición, una función 1-1 es la que manda puntos distintos en su dominio a puntos distintos en su rango, esto conduce al siguiente criterio geométrico para determinar si una función es 1-1.

Proposition 1. ***(Criterio de la recta horizontal para determinar si una función es 1-1)*** *Una función f es 1-1 si toda recta horizontal corta a la gráfica de f a lo más en un punto.*

Así, por ejemplo, según sus gráficas, las funciones x^n, con n impar, $\sqrt[n]{x}$, e^x y $\ln(x)$ son funciones 1-1. Por otra parte, las funciones x^n, con n par, $|x|$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$ son ejemplos de funciones que no son 1-1.

Si no conocemos la gráfica de una función f, no podemos utilizar el criterio de la proposición 1. En este caso, la herramienta que tenemos hasta este momento para determinar si f es 1-1 es la definición 1. Sin embargo, algunas veces, el verificar que una función es 1-1 usando la definición 1 puede no ser sencillo. En estos casos la siguiente proposición, cuya demostración se deja como ejercicio, será de utilidad.

Proposition 2. *Sea f una función. Son equivalentes:*

(a) La función f es 1-1.
(b) Para todo $x, y \in \mathrm{dom}(f)$ se cumple que

$$f(x) = f(y) \text{ implica que } x = y.$$

Example 1. Determina si la función

$$f(x) = \frac{2(x-1)^3}{5} + 7$$

es una función 1-1.

Solución Puesto que

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y) \\
\Rightarrow \frac{2(x-1)^3}{5}+7 &= \frac{2(y-1)^3}{5}+7 \\
\Rightarrow (x-1)^3 &= (y-1)^3 \\
\Rightarrow x-1 &= y-1 \ \text{(pues la función } x^3 \text{ es 1-1)} \\
\Rightarrow x &= y,
\end{aligned}$$

por el inciso (b) de la proposición 2 obtenemos que f es 1-1. □

Example 2. Determina si la función

$$f(x) = \frac{2(x-1)^2}{5}+7$$

es una función 1-1.

Solución Notemos que

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(y) \\
\Rightarrow \frac{2(x-1)^2}{5}+7 &= \frac{2(y-1)^2}{5}+7 \\
\Rightarrow (x-1)^2 &= (y-1)^2 .
\end{aligned}$$

A partir de la última ecuación no podemos asegurar que $x-1=y-1$, pues la función x^2 no es 1-1. De hecho la función f no es 1-1, pues, por ejemplo, $0 \neq 1$ y sin embargo $f(0) = 37/5 \neq 7 = f(1)$. □

Para determinar si una función $f : A \to B$ es sobre, hay que calcular su rango y ver si es igual a su codominio. Notemos que si consideramos como codominio de f a su rango, entonces la función f será sobre, es decir,

$$f : A \to \operatorname{ran}(f)$$

es una función sobre. Resumimos esta observación en la siguiente frase:

"Toda función es sobre su rango".

Por ejemplo, la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x} + 1$ no es sobre, pues $\operatorname{ran}(f) = [1, \infty) \neq \mathbb{R} = \operatorname{cod}(f)$. Sin embargo, si suponemos que $f : [0, \infty) \to [1, \infty)$, entonces f si es sobre.

Introducimos ahora a las funciones invertibles y sus inversas.

Definition 2. (Función invertible) Sea $f : A \to B$. Diremos que f es invertible si existe $g : B \to A$ tal que

$$g(f(x)) = x \text{ para todo } x \in A$$

y

$$f(g(y)) = y \text{ para todo } y \in B.$$

En este caso diremos que g es la *inversa* de f y escribiremos $g = f^{-1}$.

Como indica la definición anterior, si existe, la inversa de una función es única. Notemos que si f es invertible, entonces

$$\operatorname{dom}\left(f^{-1}\right) = \operatorname{ran}(f) \text{ y } \operatorname{ran}\left(f^{-1}\right) = \operatorname{dom}(f). \tag{0.1}$$

Además,

$$f^{-1}(f(x)) = x, \text{ para todo } x \in \operatorname{dom}(f) \tag{0.2}$$

y

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \text{ para todo } y \in \operatorname{ran}(f). \tag{0.3}$$

A partir de (0.2) y (0.3), podemos decir , en palabras comunes, que f^{-1} deshace lo que f hace y viceversa. Notemos también que

$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$

Como un primer ejemplo de una función invertible consideremos a las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x^3 \text{ y } g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Puesto que

$$f(g(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x, \quad x \in \mathbb{R}$$

y

$$g(f(x)) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x, , \quad x \in \mathbb{R},$$

entonces la función g es la inversa de f.

Para asegurar que una función es invertible disponemos del siguiente resultado.

Proposition 3. *Sea $f : A \to B$. La función f es invertible sii f es 1-1 y sobre.*

De aquí en adelante, a menos que se indique lo contrario, si f es una función 1-1 en su dominio y no especificamos su codominio, supondremos que su codominio es su rango, y en consecuencia, por la proposición 3, f será invertible. Por ejemplo, la función x^n con n impar es 1-1, en consecuencia es invertible. Su inversa es la función $\sqrt[n]{x}$.

Ahora veremos como obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.

Si f es invertible y $y \in \operatorname{ran}(f)$, sabemos que existe $x \in \operatorname{dom}(f)$ tal que $y = f(x)$. En consecuencia

$$\left(y, f^{-1}(y)\right) = (f(x), x). \tag{0.4}$$

De (0.4) obtenemos el siguiente criterio para encontrar la gráfica de una función inversa.

Proposition 4. ***(Criterio para encontrar la gráfica de una función inversa)*** *Si f es invertible, entonces la gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.*

La figura 0.1 muestra las gráficas de las funciones x^3 y $\ln(x)$ y sus inversas.

Figura 0.1 Las funciones x^3 y $\ln(x)$, y sus inversas

La siguiente proposición, cuya prueba dejamos al lector, señala una propiedad básica de las funciones inversas.

Proposition 5. ***(Inversa de la composición)*** *Sean f y g funciones invertibles. Si está definida la composición $f \circ g$, entonces $f \circ g$ es invertible y*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}. \tag{0.5}$$

Para recordar la fórmula anterior, hagamos la siguiente analogía. Pensemos que g es el proceso de ponerse los calcetines y que f es el proceso de ponerse los zapatos. Así, podemos pensar que $f \circ g$ es el proceso de ponerse los calcetines y luego los zapatos, y que $(f \circ g)^{-1}$ es el proceso inverso. Con esta analogía, la fórmula (0.5) expresa que el proceso inverso de ponerse los calcetines y luego los zapatos es quitarse los zapatos y luego los calcetines.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

En esta clase estudiaste a las funciones 1-1 y a las funciones sobre. Además de ello aprendiste un criterio para determinar si una función es invertible. Las funciones invertibles te serán de gran ayuda en tu estudio del cálculo y en general de las matemáticas

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.