Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 9

(Límites reales)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 9!

Toca el turno de que conozcas uno de los conceptos más importantes del Cálculo, el concepto de límite. Nos interesa estudiar como se comportan los valores $f(x)$ de una función f cuando x se aproxima a un número p. Intuitivamente, el límite de una función f cuando x se aproxima un número p es el número L si los valores $f(x)$ de f se aproximan L cuando x está suficientemente cerca al número p. El problema con esta noción intuitiva de límite es que la frases «se aproximan» y «está suficientemente cerca » no tiene un significado preciso (matemático). Para remediar esta situación necesitamos primero una herramienta que nos permita medir la distancia entre dos números. La función valor absoluto que definiremos en esta clase será tal herramienta.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 9.

0.2.1. Limites Reales

Definition 1. (Valor absoluto de un número) El *valor absoluto* de un número a se define como

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0, \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Entender en un principio el significado del valor absoluto de un número es algunas veces complicado, sin embargo, en palabras comunes, el valor absoluto de un número a es simplemente el mismo número a pero con signo positivo, por ejemplo $|5| = 5$ y $|-5| = 5$.

Definition 2. (Función valor absoluto) A $|x|$ le llamaremos la *función valor absoluto*. Su gráfica se muestra en la figura 0.1.

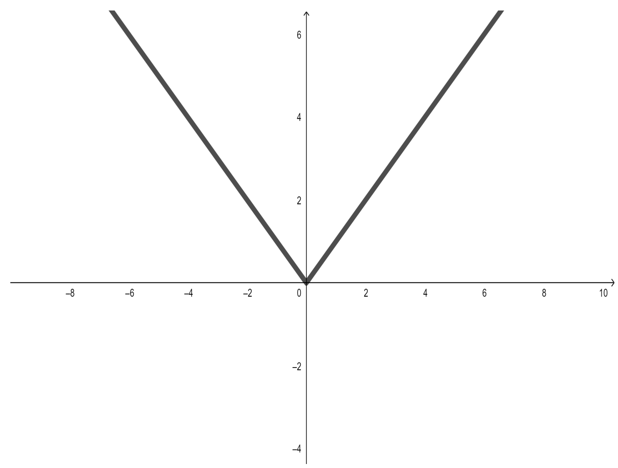

Figura 0.1 Gráfica de la función valor absoluto

Como comentamos anteriormente, la noción de valor absoluto de un número nos permitirá medir la distancia entre dos números.

Definition 3. (Distancia entre dos números) Definimos la *distancia entre dos números* x y y como

$$|x - y|.$$

Notemos que $|x - y|$ realmente representa la distancia entre x y y cuando x y y son números enteros o racionales. Por ejemplo si $x = -5$ y $y = 2$, entonces

$$\begin{aligned}|x-y| &= |-5-2| \\ &= |-7| \\ &= 7,\end{aligned}$$

y si dibujamos los números -5 y 2 sobre la recta numérica podemos apreciar que, efectivamente, el número de unidades entre -5 y 2 es 7.

Si $|x - y|$ representa la distancia entre dos números x y y entonces al hacer $y = 0$ obtenemos la siguiente interpretación geométrica de $|x|$.

Remark 1. **(Interpretación de $|x|$)** El número $|x|$ representa la distancia del número x al origen de la recta numérica.

Dada la interpretación de $|x|$ como la distancia de x al origen, la siguiente proposición parece natural.

Proposition 1. *Sea $r > 0$. Se cumple lo siguiente.*
(a) $|x| \geq 0$.
(b) $|x| = 0$ *si y sólo sí* $x = 0$.
(c) $|x| = r$ *si y sólo si* $x = r$ *o* $x = -r$.
(d) $|x| < r$ *si y sólo si* $-r < x < r$.[1]
(e) $|x| > r$ *si y sólo si* $x < -r$ *o* $x > r$.

Lo que dice el inciso (a) es simplemente que la distancia de un número x al origen nunca es negativa. El inciso (b) afirma que si la distancia de x al origen es cero, entonces necesariamente x debe de ser cero. Recíprocamente, si $x = 0$ es claro que la distancia de x al origen es cero. La interpretación del inciso (c) también es clara, la distancia entre x y el origen es r si y sólo si $x = r$ o $x = -r$. La interpretación del inciso (d) es que si el número x está en el intervalo $(-r, r)$ si y sólo si la distancia de x al origen es menor que r. La interpretación de (e) también debe de ser clara.

De los incisos (c), (d) y (e) de la proposición anterior obtenemos el siguiente corolario.

---

[1] La notación $-r < x < r$ significa que $x > -r$ y que $x < r$, es decir que $x \in (-r - r)$.

Corollary 1. *Se cumple lo siguiente.*
(a) $|x| \leq r$ *si y sólo si* $-r \leq x \leq r$.[2]
(b) $|x| \geq r$ *si y sólo si* $x \leq -r$ *o* $x \geq r$.

Otras dos propiedades menos evidentes del valor absoluto son las siguientes.

Proposition 2. *Se cumple lo siguiente.*
(a) $|xy| = |x|\,|y|$.
(b) ***(Desigualdad del triángulo)***

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

El nombre «desigualdad del triángulo» queda claro cuando se estudia la distancia entre dos puntos del plano o del espacio en un curso de cálculo de varias variables. El lector interesado en estos temas puede consultar por ejemplo [**?**] o [**?**].

Estamos listos para dar la definición rigurosa de límite de una función. Tal definición, un poco complicada en un principio, es la que expresa de manera matemática la noción intuitiva de límite de una función que vimos al principio de esta subsección.

Definition 4. (Límite de una función) Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene a p, excepto posiblemente en p. Diremos que el número real L es el *límite* de f cuando x tiende a p, lo cual denotaremos por

$$\lim_{x \to p} f(x) = L, \tag{0.1}$$

si para cada $\epsilon > 0$ (no importa que tan pequeño sea) existe $\delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $0 < |x-p| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$ (véase la figura 0.2).

Diremos que $\lim_{x\to p} f(x)$ existe, si existe un número L que cumple (0.1). Finalmente, también escribiremos «$f(x) \to L$ cuando $x \to p$» para expresar que se cumple (0.1).

Figura 0.2 L es el límite de la función f cuando x tiende a p.

[2] La notación $-r \leq x \leq r$ significa que $x \geq -r$ y que $x \leq r$, es decir que $x \in [-r, r]$.

Remark 2. Es importante hacer en este momento las siguientes observaciones.

(a) Que f esté definida en un intervalo abierto I que contiene a p, excepto posiblemente en p, significa que f está definida en el conjunto $I \setminus \{p\}$ y es posible que f esté o no esté definida en p. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$ está definida en el intervalo $(-1, 1)$ excepto en $p = 0$.

(b) Esté o no esté definida f en p, para verificar que (0.1) se cumple, sólo se consideran números x en I cercanos a p pero distintos de p, pues la condición $0 < |x - p| < \delta$ indica que la distancia de x a p es a lo más δ pero que $x \neq p$.

A continuación veremos como usar la definición 4.

Example 1. Sea $f(x) = 2$. Prueba que $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$.

Solución Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $\delta = 1$ (véase la figura 0.3). Notemos que si $0 < |x - 3| < \delta$, entonces

$$|f(x) - 2| = |2 - 2| = 0 < \epsilon,$$

por lo tanto, por la definición 4 obtenemos que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2.$$

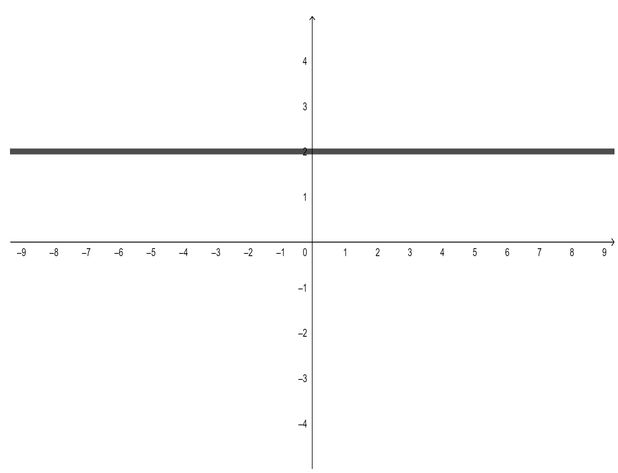

Figura 0.3 Gráfica de la función $f(x) = 2$

Example 2. Sea $f(x) = x$. Prueba que $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

Solución Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $\delta = \epsilon$ (véase la figura 0.4). Notemos que si $0 < |x-1| < \delta$, entonces

$$|f(x) - 1| = |x - 1| < \delta = \epsilon,$$

por lo tanto, por la definición 4 obtenemos que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1.$$

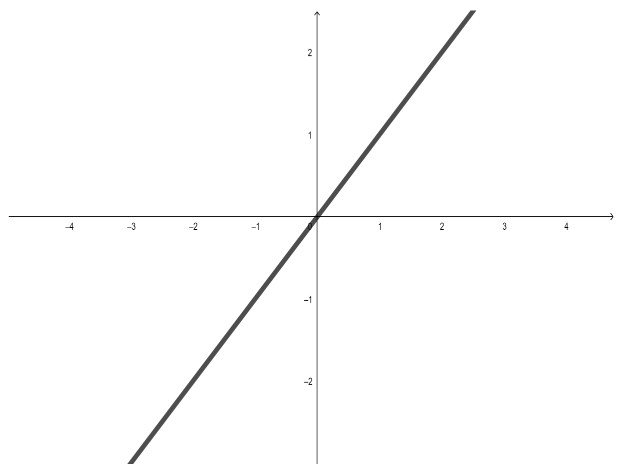

Figura 0.4 Gráfica de la función $f(x) = x$.

Example 3. **(Un límite que no existe)** Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Prueba que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Demostración. Para fijar ideas supondremos que $L = 0$. Si $L \neq 0$ la prueba es similar. Sea $\epsilon = 1/2$ (véase la figura 0.5). No importa como tomemos $\delta > 0$ no se cumple que si $0 < |x - 0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$, pues por ejemplo el punto $x = \delta/2$ cumple que $0 < |x - 0| < \delta$ y sin embargo

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= |1 - 0| \\ &= 1 \\ &> \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. □

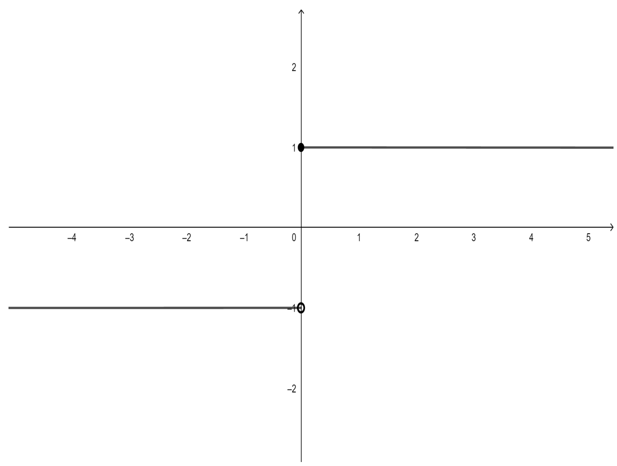

Figura 0.5 Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Example 4. **(Otro límite que no existe)** Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Prueba que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

Demostración. Para fijar ideas supondremos que $L = 5$. Si $L \neq 5$ la prueba es similar. Sea $\epsilon = 1$ (véase la figura 0.6). No importa como tomemos $\delta > 0$

no se cumple que si $0 < |x - 0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$. En efecto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N/\delta > 6$[3] y en consecuencia el número $x = \delta/N$ cumple que $0 < |x - 0| < \delta$ y sin embargo

$$\begin{aligned} |f(x) - L| &= \left| \frac{1}{(\delta/N)} - 5 \right| \\ &= \left| \frac{N}{\delta} - 5 \right| \\ &= \frac{N}{\delta} - 5 \text{ (pues como } (N/\delta) > 6 > 5, \text{ entonces } (N/\delta) - 5 > 0) \\ &> \epsilon \text{ (pues como } (N/\delta) > 6, \text{ entonces } (N/\delta) - 5 > 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. $\square$

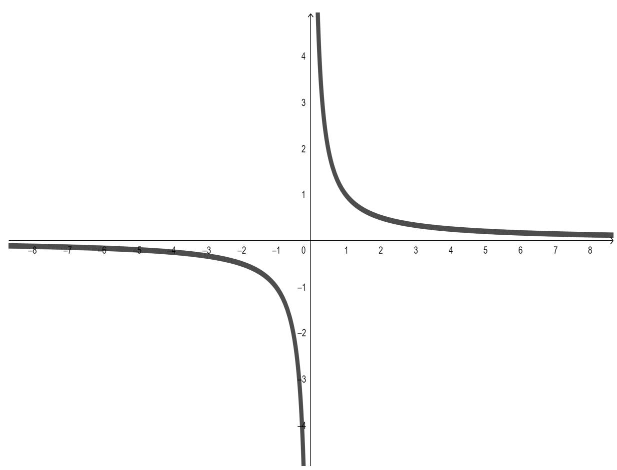

Figura 0.6 Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Remark 3. Los dos ejemplos anteriores son ejemplos clásicos de funciones que no tienen un límite cuando x se aproxima a cierto punto p. En general si los valores $f(x)$ de una función f se aproximan a un número L_1 cuando

[3] Esta afirmación se sigue de una propiedad de los números naturales llamada la propiedad arquimediana (véase por ejemplo [?]).

x se aproxima por la derecha a un número p y si los valores de $f(x)$ se aproximan a otro número L_2 cuando x se aproxima por izquierda al punto p, entonces $\lim_{x\to p} f(x)$ no existirá (más adelante regresaremos a este tema cuando veamos los límites laterales). Por otra parte, si los valores $f(x)$ de una función f crecen o decrecen arbitrariamente cuando x se aproxima a un punto p, en $\lim_{x\to p} f(x)$ tampoco existirá.

Antes de continuar, introduciremos algo de notación para simplificar la escritura. Como sabemos, es común que la regla de correspondencia de una función f esté dada mediante una ecuación, por ejemplo $f(x) = x^2$. En este caso, en lugar de escribir $\lim_{x\to p} f(x)$ algunas veces sustituiremos a $f(x)$ por la expresión algebraica que la define, por ejemplo, si $f(x) = x^2$, escribiremos $\lim_{x\to p} x^2$ en lugar de $\lim_{x\to p} f(x)$.

Para encontrar un límite o para probar que un límite no existe no siempre recurriremos a la definición 4, pues probar o calcular límites con esta definición puede ser realmente complicado para ciertas funciones. En lugar de ello partiremos del conocimiento de ciertos límites elementales y a partir de ellos calcularemos límites más complicados.

Proposition 3. ***(Límites básicos)*** *En lo que sigue c y p son fijos y p pertenece al dominio de $\sqrt[n]{x}$. Se cumple lo siguiente.*

(a) $\lim_{x\to p} c = c$.
(b) $\lim_{x\to p} x = p$.
(c)$\lim_{x\to p} |x| = |p|$.
(d)$\lim_{x\to p} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{p}$.

Proposition 4. ***(Límites de las funciones trigonométricas)****. En lo que sigue p es fijo y p pertenece al dominio de las funciones trigonométricas. Se cumple lo siguiente.*

(a) $\lim_{x\to p} \sin(x) = \sin(p)$.
(b) $\lim_{x\to p} \cos(x) = \cos(p)$.
(c) $\lim_{x\to p} \tan(x) = \tan(p)$.
(d) $\lim_{x\to p} \cot(x) = \cot(p)$.
(e) $\lim_{x\to p} \sec(x) = \sec(p)$.
(f) $\lim_{x\to p} \csc(x) = \csc(p)$.

Proposition 5. *(Límites de las funciones logaritmo natural y exponencial) En lo que sigue p es fijo y p pertenece al dominio de las funciones en cuestión. Se cumple lo siguiente.*
(a) $\lim_{x\to p} \ln(x) = \ln(p)$.
(b) $\lim_{x\to p} e^x = e^p$.

Como el lector apreciará, para calcular $\lim_{x\to p} f(x)$ cuando f es una de las funciones que aparecen el las tres proposiciones anteriores simplemente hay que evaluar la función f en p, sin embargo, cabe señalar que esto no se puede hacer con todas las funciones (más adelante veremos ejemplos de esto). Las funciones de las tres proposiciones anteriores son ejemplos de un tipo de funciones muy importante llamadas funciones continuas, las cuales estudiaremos más adelante.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

Espero que hayas tenido un buen encuentro con el concepto de límite. En eta clase aprendiste el límite de funciones elementales y no tan elementales que aparecerán frecuentemente en el curso. Para poder medir la distancia entre dos números se introdujo la función valor absoluto y se estudiaron algunas de sus propiedades. Un punto importante de esta clase es darse cuenta, aunque para muchas funciones f , el cálculo de $\lim_{x \to p} f(x)$ se reduce a simplemente evaluar la función f en p, esto no se puede hacer con todas las funciones, las funciones con las que sí se puede hacer son las llamadas funciones continuas, las cuales estudiaremos más adelante.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.