Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 10

(Operaciones con límites)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 10!

Así como aprendiste a realizar operaciones con funciones, en esta clase aprenderás a realizar operaciones con límites. Aprenderás a sumar, restar, multiplicar y dividir límites de funciones. Como consecuencia de lo anterior, serás capaz de calcular límites de funciones que aparentemente parecen complicadas pero que en realidad no lo son. Como ejemplo calcularemos límites de polinomios.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 10.

Proposition 1. ***(Operaciones con límites)*** *Sean f y g funciones definidas en un intervalo abierto I que contiene a p, excepto posiblemente en p.Supongamos que $\lim_{x\to p} f(x)$ y que $\lim_{x\to p} g(x)$ existen. Entonces*

(a)
$$\lim_{x\to p}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to p} f(x)+\lim_{x\to p} g(x).$$

(b)
$$\lim_{x\to p}\left[f(x)-g(x)\right]=\lim_{x\to p} f(x)-\lim_{x\to p} g(x).$$

(c)
$$\lim_{x\to p}\left[f(x)\,g(x)\right]=\left[\lim_{x\to p} f(x)\right]\left[\lim_{x\to p} g(x)\right].$$

(d)
$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)},\ \ si\ \ \lim_{x\to p} g(x)\neq 0.$$

En otras palabras, la proposición anterior dice lo siguiente:

- El límite de una suma es la suma de los límites.
- El límite de una resta es la resta de los límites.
- El límite de un producto es el producto de los límites.
- El límite de una cociente es el cociente de los límites si el límite del denominador no es cero.

Remark 1. Notemos que si c es una constante, entonces del inciso (a) de la proposición sobre los límites básicos, y del inciso (c) del teorema 1 obtenemos que

$$\lim_{x\to p} cf(x) = \left[\lim_{x\to p} c\right]\left[\lim_{x\to p} f(x)\right] = c \cdot \lim_{x\to p} f(x).$$

Example 1. $\lim_{x\to p} x^n = p^n$.

En efecto, por el inciso (b) de la proposición sobre límites básicos, sabemos que $\lim_{x\to p} x = p$. En consecuencia por el inciso (c) de la proposición 1 sabemos que

$$\lim_{x\to p} x^2 = \left[\lim_{x\to p} x\right]\left[\lim_{x\to p} x\right] = p \cdot p = p^2.$$

Example 2. Si c es una constante, entonces $\lim_{x\to p} cx^n = c \cdot p^n$.

En efecto, como c es una constante, como lo mencionamos después de la proposición 1 obtenemos que

$$\lim_{x\to p} cx^n = c\left[\lim_{x\to p} x^n\right] = c \cdot p^n.$$

Example 3. **(Límite de un polinomio)** Si $P(x)$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x\to p} P(x) = P(p).$$

En efecto, como $P(x)$ es de la forma

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

donde $a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes, entonces por el inciso (a) de la proposición 1 y lo que mostramos en los dos ejemplos anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to p} P(x) &= \lim_{x\to p} \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right] \\
&= \lim_{x\to p} a_0 + \lim_{x\to p} a_1 x + \lim_{x\to p} a_2 x^2 + \cdots + \lim_{x\to p} a_n x^n \\
&= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n \\
&= P(p).
\end{aligned}$$

Así, para calcular $\lim_{x\to p} P(x)$ cuando P es un polinomio también basta evaluar P en p.

Con los resultados de esta clase podemos calcular límites que en apariencia parecen imposibles pero que en realidad son sencillos.

Example 4. Calcula el límite

$$\lim_{x\to 0} \left[\cos(x)\left(3x^7 - 5x + 4 - e^x\right)\frac{\tan(x) + 18|x| + 4}{1 + x^2}\right].$$

Solución Según los resultados de esta sección tenemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \left[\cos(x)\left(3x^7 - 5x + 4 - e^x\right)\frac{\tan(x) + 18|x| + 4}{1 + x^2}\right] = \\
&= \left[\lim_{x\to 0} \cos(x)\right]\left[\lim_{x\to 0}\left(3x^7 - 5x + 4 - e^x\right)\right]\frac{\lim_{x\to 0}\tan(x) + \lim_{x\to 0}(18|x| + 4)}{\lim_{x\to 0}(1 + x^2)} \\
&= 1\cdot 3\frac{0+4}{1} \\
&= 12.
\end{aligned}$$

Ya mostramos funciones f para las cuales $\lim_{x\to p} f(x)$ no existe. Ademas vimos funciones que tienen la propiedad de que para calcular $\lim_{x\to p} f(x)$ basta con evaluar f en p. El siguiente ejemplo muestra que esto no siempre es posible.

Example 5. **(Una función f tal que $\lim_{x\to p} f(x) \neq f(p)$)** Consideremos la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 3, \\ 2, & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

La gráfica de la función f se muestra en la figura 0.1. Entonces

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1 \neq 2 = f(3).$$

En efecto, basta mostrar que $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$. Sea $\epsilon > 0$ y tomemos $\delta = 1$. Luego si $0 < |x-3| < \delta$, entonces en particular $x \neq 3$ y en consecuencia $f(x) = 1$. Por lo cual

$$|f(x) - 1| = |1-1| = 0 < \epsilon,$$

luego por la definición de límite obtenemos que $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$.

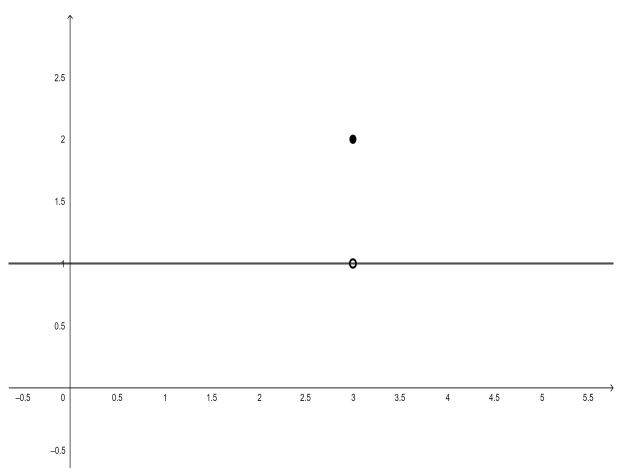

Figura 0.1 Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 3, \\ 2, & \text{si } x = 3. \end{cases}$

Puesto que la definición de $\lim_{x\to p} f(x)$ no requiere que f esté definida en p, tenemos el siguiente resultado.

Proposition 2. *Supongamos que f y g son funciones definidas en un intervalo abierto I que contiene a p, excepto posiblemente en p. Si*

$$f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in I \text{ con } x \neq p$$

y $\lim_{x\to p} g(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to p} f(x)$ también existe y

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} g(x).$$

Como una aplicación de la proposición anterior veamos el ejemplo siguiente.

Example 6. **(Límites por factorización)** Calcula

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2}{x-1}. \tag{0.1}$$

Solución Notemos primero que para calcular este límite no podemos usar el inciso (d) del álgebra de límites, pues el límite del denominador de (0.1) cuando x tiende a 1 es 0. Por otra parte, notemos que si $x \neq 1$, al factorizar el numerador de (0.1) obtenemos que

$$\frac{x^3 - x^2}{x-1} = \frac{x^2(x-1)}{x-1} = x^2 \text{ si } x \neq 1.$$

Las funciones $f(x) = \left(x^3 - x^2\right)/(x-1)$ y $g(x) = x^2$ son iguales en todo punto, excepto en $x = 1$, pues $g(1) = 1$ y f ni siquiera está definida en $x = 1$. Las gráficas de f y g se muestran en la figura 0.2. Por la proposición 2 obtenemos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2 = 1. \ \square$$

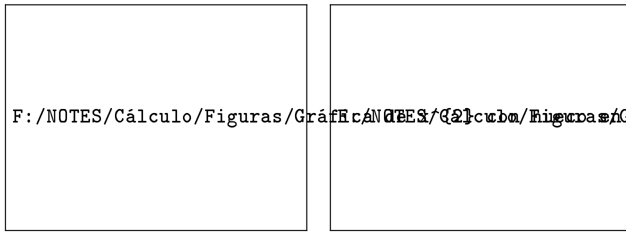

Figura 0.2 Gráficas de las funciones $f(x) = \left(x^3 - x^2\right) / (x-1)$ y $g(x) = x^2$. La función f no está definida en $x = 1$.

Example 7. **(Otro límite por factorización)** Calcula

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 8x + 6}{x^3 + 3x^2 + x + 3}.$$

Solución Como

$$\frac{2x^2 + 8x + 6}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = \frac{(x+3)(2x+2)}{(x^2+1)(x+3)} = \frac{2x+2}{x^2+1} \text{ si } x \neq -3,$$

entonces por la proposición 2 obtenemos que

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^2 + 8x + 6}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = \lim_{x \to -3} \frac{2x+2}{x^2+1} = -\frac{4}{10}. \square$$

Ahora enunciaremos un resultado clásico de límites, el famoso lema del sándwich.

Lemma 1. ***(del Sándwich)*** *Supongamos que f y g son funciones definidas en un intervalo abierto I que contiene a p,excepto posiblemente en p. Si*

$$0 \leq f(x) \leq g(x), \quad \textit{para todo } x \in I \backslash \{p\}$$

y

$$\lim_{x \to p} g(x) = 0,$$

entonces

$$\lim_{x \to p} f(x) = 0.$$

El lema del sándwich es equivalente al siguiente corolario, también conocido como lema del sándwich.

Proposition 3. *Supongamos que f, g y h son funciones definidas en un intervalo abierto I que contiene a p,excepto posiblemente en p. Si*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \textit{para todo } x \in I \backslash \{p\}$$

y

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

entonces

$$\lim_{x \to p} g(x) = L.$$

Como una aplicación del lema del sándwich veamos el ejemplo siguiente.

Example 8. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Notemos que para calcular este límite no podemos usar el inciso (d) del álgebra de límites, pues el límite del denominador es 0. Este límite también lo calcularemos usando técnicas cuando veamos la regla del Marqués del Hospital. Más adelante mostraremos que

$$\sin(x) \leq x \leq \tan(x) \quad \text{para toda } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

y que

$$\sin(x) \geq x \geq \tan(x) \quad \text{para toda } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right].$$

Entonces al dividir ambas desigualdades entre $\sin(x)$ resulta que

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1 \text{ para toda } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Luego, como $\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$ y $\lim_{x \to 0} 1 = 1$, por el lema del sándwich obtenemos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Terminaremos esta subsección estudiando el límite de una función compuesta.

Proposition 4. ***(Límite de una función compuesta)*** *Sean f y g funciones tales que* $\lim_{x\to p} f(x) = L$ *y* $\lim_{x\to L} g(x) = g(L)$. *Entonces*

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = g(L).$$

La condición de que $\lim_{x\to L} g(x) = g(L)$ en la proposición anterior se expresa diciendo que la función g es continua en L. Más adelante estudiaremos a las funciones continuas.

Example 9. Para ilustrar el resultado anterior calculemos $\lim_{x\to 2}(x^2-3)^{57}$. Consideremos a las funciones $f(x) = x^2-3$ y $g(x) = x^{57}$. Como $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$, entonces se tendrá que $\lim_{x\to 2}(x^2-3)^{57} = \lim_{x\to 2} g(f(x)) = g(1) = 1$. $\square$

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

Ya sabes operar con límites de funciones y sabes calcular el límite de muchas funciones comunes, por ejemplo los polinomios. Este conocimiento sera de utilidad cuando veamos la derivada que se define mediante un límite.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.