Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 11

(Límites laterales)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 11!

En esta miniclase conocerás a los límites laterales de una función. Con ellos algunas veces serás capaz de verificar la existencia de un límite de manera sencilla.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 11.

0.2.1. Límites Laterales

Ahora introduciremos el concepto de límites lateral. Dicho concepto surge al estudiar el comportamiento de una función f cuando x se aproxima a un punto p sólo por puntos a la derecha de p o sólo por puntos a la izquierda de p. El concepto de límite lateral será de utilidad para determinar la existencia de límites de funciones.

Definition 1. (Límites laterales)

(a) Sea f una función definida en un intervalo abierto (p, a). Diremos que el número real L es el *límite de f cuando x tiende a p por la derecha*, lo cual denotaremos por

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L, \tag{0.1}$$

si para cada $\epsilon > 0$ (no importa que tan pequeño sea) existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (p, a)$ y $0 < x - p < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

(b) Sea f una función definida en un intervalo abierto (a, p).Diremos que el número real L es el *límite de f cuando x tiende a p por la izquierda*, lo cual denotaremos por

$$\lim_{x \to p^-} f(x) = L, \tag{0.2}$$

si para cada $\epsilon > 0$ (no importa que tan pequeño sea) existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, p)$ y $0 < p - x < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Remark 1. A diferencia de la definición de límite real dada en la clase digital 4, para verificar que (0.1) se cumple, sólo se consideran números x cercanos a p y a la derecha de p. Análogamente, para verificar que (0.2) se cumple, sólo se consideran números x cercanos a p y a la izquierda de p.

La siguiente proposición nos da un criterio para determinar la existencia de un límite en términos de los límites laterales.

Proposition 1. ***(Criterio de los límites laterales)*** $\lim_{x \to p} f(x) = L$ *si y sólo si* $\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x) = L$.

Example 1. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(recuerda la gráfica de f). Notemos primero que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1$ y que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1$. Puesto que $\lim_{x \to 0} 1 = 1$ y $\lim_{x \to 0} -1 = -1$, entonces por la proposición 1 se tiene que $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ y que $\lim_{x \to 0^-} -1 = -1$. En consecuencia,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

y que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1.$$

Nuevamente por la proposición 1 resulta que que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe, como lo probamos en el ejemplo de una clase pasada.

Remark 2. Con los límites laterales se cumple una proposición análoga a la del álgebra de límites con $x \to p^-$ (o $x \to p^+$) en lugar de $x \to p$. A tal resultado le llamaremos «*álgebra de límites laterales*». El lema del Sándwich también se cumple con $x \to p^-$ (o $x \to p^+$) en lugar de $x \to p$.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

Sólo resta recordarte que aunque pequeña, esta clase es importante. Mediante los límites laterales puedes determinas si un límite existe. Más adelante definiremos la derivada de una función mediante un límite y veremos que en ocasiones tal límite no existe usando el criterio de los límites laterales.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos*. Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo*. Editorial Interamericana, 1998.