Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 12

(Límites al infinito)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 12!

Ahora nos interesa estudiar el comportamiento de los valores $f(x)$ de una función f cuando x crece o decrece arbitrariamente grande, para lo cual estudiaremos a los límites al infinito.

En esta clase indicaremos los límites al infinito de funciones básicas. Además, veremos como operar con límites al infinito. En particular veremos como calcular límites al infinito de funciones racionales. Finalmente estudiaremos a las asíntotas horizontales de la gráfica de una función.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 12.

0.2.1. Límites al Infinito

Definition 1. (Límites al infinito)

(a) Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞). Diremos que el número real L es el *límite de* f *cuando* x *tiende a* ∞, lo cual denotaremos por

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L, \tag{0.1}$$

si para cada $\epsilon > 0$ (no importa que tan pequeño sea) existe $M > 0$ tal que si $x \in (a, \infty)$ y $x > M$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

(b) Sea f una función definida en un intervalo $(-\infty, a)$. Diremos que el número real L es el *límite de* f *cuando* x *tiende a* $-\infty$, lo cual denotaremos por

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L, \tag{0.2}$$

si para cada $\epsilon > 0$ (no importa que tan pequeño sea) existe $M < 0$ tal que si $x \in (-\infty, a)$ y $x < M$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

A continuación enunciamos algunos límites al infinito básicos.

Proposition 1. ***(Límites al infinito básicos)*** *Se cumple lo siguiente.*

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} c = c$ *(aquí c es una constante).*

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$.

(d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$ *si n es impar (si n es par $\sqrt[n]{x}$ no está definida para $x < 0$).*

(e) $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$.

(f) $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

(g) $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Remark 1. Con los límites al infinito se cumple una proposición análoga al álgebra de límites con $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$) en lugar de $x \to p$. A tal resultado le llamaremos «*álgebra de límites al infinito*».

Remark 2. En la lista siguiente recopilamos algunos limites al infinito que no existen. Tales límites no existen pues los valores de las funciones en cuestión crecen o decrecen arbitrariamente u oscilan entre dos números cuando x crece o decrece arbitrariamente.

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} x^{n}$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[n]{x}$ (si n es par $\sqrt[n]{x}$ ni siquiera está definida para $x < 0$).

(c) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ si f es una función trigonométrica o un polinomio no constante.

(d) $\lim_{x\to\pm\infty} \ln(x)$($\ln(x)$ ni siquiera está definida para $x < 0$).

(e) $\lim_{x\to\infty} e^{x}$.

A continuación calcularemos límites al infinito de funciones racionales, para lo cual el inciso (b) de la proposición 1 será de gran utilidad.

Proposition 2. ***(Límites al infinito de funciones racionales)*** *Sea*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

, donde

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

y

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m.$$

(a) Si el grado de P es menor que el grado de R entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = 0.$$

(b) Si el grado de P es igual que el grado de R, es decir, si $m = n$, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} R(x) = \frac{a_n}{b_n}.$$

(c) Si el grado de P es mayor que el grado de Q, entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} R(x)$$

no existe

En lugar de probar la proposición anterior procederemos a ilustrar con ejemplos las afirmaciones (a), (b) y (c).

Example 1. A continuación mostraremos que

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-5x^2}{7x^5+8x^3} = 0$.

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5-5x^2}{7x^5+8x^3} = \frac{4}{7}$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^5-5x^2}{7x^3+8x^3}$ no existe.

Solución (a) Primero notemos que del inciso (b) de la proposición 1 y del el inciso (c) del álgebra de límites al infinito obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0.$$

Al dividir por x^5 tanto el numerador como el denominador de la función racional de (a), teniendo en cuenta en inciso (a) de la proposición 1 y nuevamente el álgebra de límites al infinito obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x^2}{7x^5+8x^3} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{7+\frac{8}{x^2}}\\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim_{x\to\infty}7+\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}}\\
&= \frac{0}{7}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) Al dividir por x^5 tanto el numerador como el denominador de la función racional de (b) y teniendo en cuenta nuevamente el álgebra de límites al infinito obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-5x^2}{7x^5+8x^3} &= \lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{5}{x^3}}{7+\frac{8}{x^2}x}\\
&= \frac{\lim_{x\to\infty}4-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim_{x\to\infty}7+\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}x}\\
&= \frac{4-0}{7+0}\\
&= \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

(c) Al dividir $4x^5-5x^2$ entre $7x^3+8x^3$ obtenemos que

$$\frac{4x^5-5x^2}{7x^3+8x^3}=H(x)+\frac{r(x)}{7x^3+8x^3},$$

donde H es un polinomio no constante y el grado de r es menor que 3. Por (c) de la observación 2 sabemos que $\lim_{x\to\infty}H(x)$ no existe, luego si suponemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-5x^2}{7x^3+8x^3}$$

existe, por el álgebra de límites al infinito tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} H(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^5-5x^2}{7x^3+8x^3}-\frac{r(x)}{7x^3+8x^3}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-5x^2}{7x^3+8x^3}-\lim_{x\to\infty}\frac{r(x)}{7x^3+8x^3}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-5x^2}{7x^3+8x^3},
\end{aligned}$$

lo cual no es posible pues $\lim_{x\to\infty} H(x)$ no existe. Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^5-5x^2}{7x^3+8x^3}$$

no existe.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces los valores $f(x)$ se aproximarán al número L si x es suficientemente grande, en consecuencia la gráfica de f se aproximará a la recta $y = L$ si x es suficientemente grande. Una situación análoga ocurre si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. . Por esta razón a la recta $y = L$ le damos un nombre especial.

Definition 2. (Asíntota horizontal) Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$, entonces a la recta $y = L$ le llamaremos asíntota horizontal de la gráfica de f (véase la figura 0.1).

Example 2. **(Asíntota horizontal)** Encuentra, si las hay, las asíntotas horizontales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{10x^2-9x}{x^3+1}.$$

F:/NOTES/Cálculo/Figuras/Asíntota horizontal de (x-2)^{-1}+1

Figura 0.1 La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función $\frac{1}{x-2} + 1$.

Solución Por la proposición 2 sabemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. En consecuencia la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f (véase la figura 0.2). $\square$

F:/NOTES/Cálculo/Figuras/Asíntota horizontal de función racional

Figura 0.2 La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función $f(x) = \frac{10x^2-9x}{x^3+1}$.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

Ahora ya sabes calcular los límites al infinito de varias funciones. En particular ya puedes calcular los límites al infinito de las funciones racionales.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.