Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 13

(Límites infinitos)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 13!

Ahora nos interesa definir el límite de una función cuyos valores $f(x)$ crecen o decrecen arbitrariamente cuando x se aproxima a un número p.

En esta clase indicaremos los límites infinitos básicos. Además, veremos como operar con límites infinitos, para lo cual necesitaremos definir operaciones con los símbolos ∞ y $-\infty$. Finalmente estudiaremos a las asíntotas verticales de la gráfica de una función.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 13.

0.2.1. Límites Infinitos

Puesto que necesitaremos operar con límites infinitos, necesitaremos definir el el sistema ampliado de los números reales.

Definition 1. (Sistema ampliado de los números reales) Definimos el *sistema ampliado de los números reales* como el conjunto

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}.$$

En $\mathbb{R}^*$, además de las operaciones de suma y producto entre números reales definimos las siguientes operaciones: (en lo que sigue$x \in \mathbb{R}$)

1. $x \pm \infty = \pm\infty + x = \pm\infty$.
2. $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty, \text{ si } x > 0$.
3. $x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty, \text{ si } x < 0$.
4. $\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty$ si $x > 0$.

5. $\frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty$ si $x < 0$.
6. $\frac{x}{\pm\infty} = 0$.
7. $\infty + \infty = \infty$.
8. $-\infty - \infty = -\infty$.
9. $\infty \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot \infty = \pm\infty$.
10. $-\infty \cdot (-\infty) = \infty$.

Notemos que no hemos definido las operaciones $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$, $-\infty \cdot 0$, $\pm\infty/0$ y $\pm\infty/\pm\infty$. Finalmente, además de los axiomas de orden de $\mathbb{R}$, en $\mathbb{R}^*$ supondremos que

$$-\infty < x < \infty$$

y que

$$-\infty < \infty.$$

Definition 2. (Límites infinitos) Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene a p, excepto posiblemente en p.

(a) Diremos que el *límite de f cuando x tiende a p es ∞*, lo cual denotaremos por
$$\lim_{x \to p} f(x) = \infty, \tag{0.1}$$
si para cada $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $0 < |x - p| < \delta$, entonces $f(x) > M$.

(b) Diremos que el *límite de f cuando x tiende a p es $-\infty$*, lo cual denotaremos por
$$\lim_{x \to p} f(x) = -\infty, \tag{0.2}$$
si para cada $M < 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in I$ y $0 < |x - p| < \delta$, entonces $f(x) < M$.

De manera similar, con sus respectivas modificaciones, definimos los límites laterales infinitos $\lim_{x \to p^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to p^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to p^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to p^-} f(x) = -\infty$. Dejamos al lector como ejercicio que escriba tales definiciones.

Remark 1. Es momento de introducir una nota aclaratoria para evitar confusiones. Si sucede que $\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty$, entonces diremos que $\lim_{x\to p} f(x)$ existe como límite infinito y también diremos que no existe como límite real.

A continuación enunciamos algunos límites infinitos básicos.

Proposition 1. ***(Límites infinitos básicos)*** *Se cumple lo siguiente.*

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$.
(b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
(c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = \infty$.
(d) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = -\infty$ *si n es impar (si n es par $\sqrt[n]{x}$ no está definida para $x < 0$).*
(e) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.
(f) $\lim_{x\to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$.
(g) $\lim_{x\to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = \infty$.

Remark 2. Con las operaciones que definimos en $\mathbb{R}^*$ se cumple una proposición análoga al álgebra de límites para los límites infinitos o para los límites laterales infinitos. A tales resultados les llamaremos «*álgebra de límites infinitos*» y «*álgebra de límites laterales infinitos*», respectivamente. Además de lo anterior, también se cumple una criterio análogo al criterio de los límites laterales. A tal resultado le llamaremos «*criterio de los límites laterales infinitos*».

Example 1. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

1. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$.

2. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty, & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

En efecto, como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

entonces por el álgebra de límites infinitos sabemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\right)^n = \infty^n = \infty.$$

Por otra parte, como

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

entonces por el álgebra de límites infinitos sabemos que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \left(\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}\right)^n = (-\infty)^n = \begin{cases} \infty, & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \quad \square$$

Example 2. $\lim_{x\to 0} 1/x$ no existe, ni como límite real ni como límite infinito. En general, si n es impar, entonces $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n}$ no existe, ni como límite real ni como límite infinito.

En efecto, por la proposición 1 sabemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

y que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Luego por el criterio de los límites laterales infinitos concluimos que $\lim_{x\to 0} 1/x$ no existe. $\square$

Example 3. $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$. En general, si n es par, entonces $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = \infty$.

En efecto, como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

entonces por al álgebra de límites infinitos,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\right) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

Análogamente se tiene que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Luego por el criterio de los límites infinitos concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty. \ \square$$

Continuamos con el siguiente resultado, el cual relaciona límites reales con límites infinitos.

Proposition 2. *Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene a p, excepto posiblemente en p.*

(a) Si $f(x) > 0$ para todo x en $I \setminus \{p\}$, entonces

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \textit{ si y sólo si } \lim_{x\to p} \frac{1}{f(x)} = \infty.$$

(b) Si $f(x) < 0$ para todo x en $I \setminus \{p\}$, entonces

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 \textit{ si y sólo si } \lim_{x\to p} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Con sus respectivas modificaciones, la proposición anterior también se cumple con $x \to p^-$ (o $x \to p^+$) en lugar de $x \to p$.

Example 4. Como $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, entonces por la proposición anterior obtenemos que $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = \infty$, como ya lo habíamos probado en un ejemplo anterior. $\square$

Example 5. Puesto que $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, entonces por la proposición anterior obtenemos que $\lim_{x\to 0} 1/\ln(x) = 0$. $\square$

Si $\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty$, entonces los valores $f(x)$ crecen o decrecen arbitrariamente cuando x se aproxima ap, en consecuencia la gráfica de f se aproximará a la recta $x = p$ si x se aproxima a p. Una situación análoga ocurre con si en lugar $x \to p$ consideramos $x \to p^-$ y $x \to p^+$. Por esta razón, a la recta $x = p$ le damos un nombre especial.

Definition 3. (Asíntota vertical) Si $\lim_{x\to p} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to p^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x\to p^+} f(x) = \pm\infty$, entonces a la recta $x = p$ le llamaremos asíntota vertical de la gráfica de f (véase la figura 0.1).

El resultado siguiente será de utilidad para el cálculo de asíntotas verticales.

Proposition 3. *Sean f y g funciones definidas en un intervalo abierto I que contiene a p, excepto posiblemente en p.*

F:/NOTES/Cálculo/Figuras/Asíntota vertical de (x-2)^{-1}+1

Figura 0.1 La recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función $\frac{1}{x-2} + 1$.

(a) Si $\lim_{x \to p} f(x) > 0$, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$ *y* $g(x) > 0$ *en* $I \backslash \{p\}$, *entonces*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

(b) Si $\lim_{x \to p} f(x) > 0$, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$ *y* $g(x) < 0$ *en* $I \backslash \{p\}$, *entonces*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

(c) Si $\lim_{x \to p} f(x) < 0$, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$ *y* $g(x) > 0$ *en* $I \backslash \{p\}$, *entonces*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

(d) Si $\lim_{x \to p} f(x) < 0$, $\lim_{x \to p} g(x) = 0$ *y* $g(x) < 0$ *en* $I \backslash \{p\}$, *entonces*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

En consecuencia, en cualquier caso, la recta $x = p$ *es una asíntota vertical de la función* $f(x)/g(x)$.

Con sus respectivas modificaciones, la proposición anterior también se cumple con $x \to p^-$ (o $x \to p^+$) en lugar de $x \to p$.

Como una aplicación de la proposición anterior consideremos el ejemplo siguiente.

Example 6. **(Asíntotas verticales)** Encuentra, si las hay, las asíntotas verticales de la gráfica de la función

$$\frac{10x^2 - 9x}{x^3 + 1}.$$

Solución Sean $f(x) = 10x^2 - 9$ y $g(x) = x^3 + 1$. Puesto que $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 19 > 0$, $\lim_{x \to -1^+} g(x) = 0$ y $g(x) > 0$ en $(-1, 0)$, entonces, por la proposición 3, obtenemos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{10x^2 - 9x}{x^3 + 1} = \infty.$$

Por lo tanto la recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la gráfica de f (véase la figura 0.2). $\square$

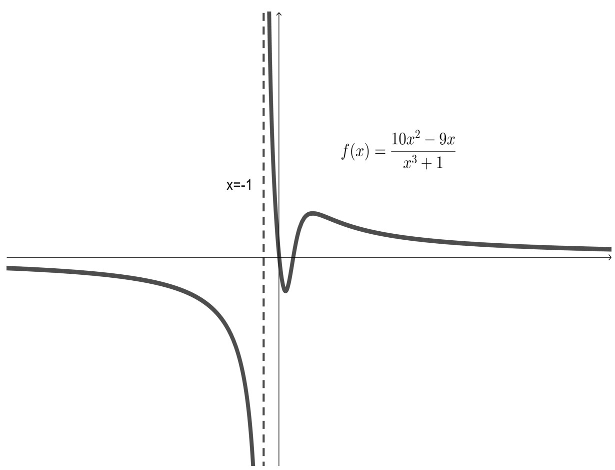

Figura 0.2 La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función $f(x) = \frac{10x^2 - 9x}{x^3 + 1}$.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

En esta sección conociste el sistema ampliado de los números reales, necesario para trabajar de manera adecuada con limites infinitos. Además, ya sabes calcular varios límites infinitos y asíntotas verticales de la gráfica de una función.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.