Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 14

(Límites infinitos al infinito)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 14!

Ahora queremos definir el límite de una función f cuyos valores $f(x)$ crecen o decrecen arbitrariamente cuando x crece o decrece arbitrariamente. En esta clase indicaremos los límites infinitos al infinito básicos. En particular estudiaremos como se comportan los valores de un polinomio cuando x es arbitrariamente grande.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 14.

0.2.1. Límites Infinitos al infinito

Definition 1. (Límites infinitos al infinito)

(a) Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞). Diremos que el *límite de f cuando x tiende a ∞ es ∞*, lo cual denotaremos por

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \tag{0.1}$$

si para cada $M > 0$ existe $N > 0$ tal que si $x \in (a, \infty)$ y $x > N$, entonces $f(x) > M$.

(b) Sea f una función definida en un intervalo (a, ∞). Diremos que el *límite de f cuando x tiende a ∞ es $-\infty$*, lo cual denotaremos por

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty, \tag{0.2}$$

si para cada $M < 0$ existe $N > 0$ tal que si $x \in (a, \infty)$ y $x > N$, entonces $f(x) < M$.

(c) Sea f una función definida en un intervalo $(-\infty, a)$. Diremos que el *límite de f cuando x tiende a $-\infty$ es ∞*, lo cual denotaremos por

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \tag{0.3}$$

si para cada $M > 0$ existe $N < 0$ tal que si $x \in (-\infty, a)$ y $x < N$, entonces $f(x) > M$.

(d) Sea f una función definida en un intervalo $(-\infty, a)$. Diremos que el *límite de f cuando x tiende a $-\infty$ es $-\infty$*, lo cual denotaremos por

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \tag{0.4}$$

si para cada $M < 0$ existe $N < 0$ tal que si $x \in (-\infty, a)$ y $x < N$, entonces $f(x) < M$.

A continuación enunciamos algunos límites infinitos al infinito básicos.

Proposition 1. ***(Límites infinitos al infinito básicos)*** *Se cumple lo siguiente.*

(a) $\lim_{x\to\infty} x = \infty$.
(b) $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.
(c) $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$.
(d) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

Remark 1. Con las operaciones que definimos en $\mathbb{R}^*$ se cumple una proposición análoga al álgebra de límites para los límites infinitos al infinito, con $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$) en lugar de $x \to p$. A tal resultado le llamaremos «*álgebra de límites infinitos al infinito*».

Example 1. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces

1. $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$.
2. $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} \infty, & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

En efecto, como
$$\lim_{x\to\infty} x = \infty,$$
entonces por el álgebra de límites infinitos al infinito sabemos que
$$\lim_{x\to\infty} x^n = \left(\lim_{x\to\infty} x\right)^n = \infty^n = \infty.$$
Por otra parte, como
$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty,$$
entonces por el álgebra de límites infinitos al infinito sabemos que
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \left(\lim_{x\to-\infty} x\right)^n = (-\infty)^n = \begin{cases} \infty, & \text{si } n \text{ es par,} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases} \square$$

Example 2. $\lim_{x\to\infty} \left(3x^3 + \ln(x) - 2\right) = \infty$.

En efecto, por el álgebra de limites infinitos al infinito tenemos que
$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \left(3x^3 + \ln(x) - 2\right) &= \lim_{x\to\infty} 3x^3 + \lim_{x\to\infty} \ln(x) - \lim_{x\to\infty} 2 \\ &= \infty + \infty - 2 \\ &= \infty - 2 \\ &= \infty. \ \square \end{aligned}$$

Terminamos esta sección con el siguiente resultado.

Proposition 2. ***(Límite al infinito de un polinomio no constante)*** *Sea $n \geq 1$ y*
$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

un polinomio con coeficiente principal $a_n \neq 0$.

(a) Si $a_n > 0$, *entonces*
$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \pm\infty.$$

(b) Si $a_n < 0$, *entonces*
$$\lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \mp\infty.$$

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

En esta sección conociste los límites infinitos al infinito de una función, los cuales son una combinación de límites infinitos con límites infinitos. Conociste algunos límites infinitos al infinito básicos y como operar con ellos.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.