**Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa**

**CLASE DIGITAL 15**

**(Continuidad)**

## 0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 15!

En esta clase estudiaremos uno de los conceptos más importantes del Cálculo, la continuidad. Veremos su definición y, muy importante, su significado. Además de lo anterior veremos como operar con las funciones continuas.

## 0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 15.

### *0.2.1. Continuidad y operaciones con funciones continuas*

Después de haber estudiado los límites de funciones y sus propiedades, estamos listos para introducir uno de los conceptos más importantes del cálculo, la continuidad. Iniciamos con su definición.

**Definition 1. (Continuidad)** Sea $f$ una función definida en un intervalo (o en una unión de intervalos) $I$ que contiene a $p$.

(a) Diremos que $f$ es *continua* en $p$[1] si

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p). \tag{0.1}$$

(b) Diremos que $f$ es *continua* en $I$ si $f$ es continua en todo punto de $I$.

[1] Si por ejemplo $I$ es un intervalo de la forma $(a, b]$ y $p = b$, entonces (0.1) se refiere a un límite lateral.

Como vimos anteriormente, no todas las funciones $f$ tienen la propiedad de que para calcular $\lim_{x\to p} f(x)$ simplemente hay que evaluar $f$ en $p$, las funciones continuas son precisamente las funciones que tienen esa propiedad. Las funciones de las figuras 0.1 y 0.2 son ejemplos de funciones que no son continuas en 0 y en 3 respectivamente. Por otra parte ¿cuál es la razón de que a las funciones que cumplen 0.1 se les llame continuas en $p$ ? El adjetivo «continua» se justifica en la siguiente observación.

---

*Remark 1.* (a) Si $f$ es continua en $p$, entonces $\lim_{x\to p} f(x)$ existe y en consecuencia los límites laterales $\lim_{x\to p^+} f(x)$ y $\lim_{x\to p^-} f(x)$ existen y son iguales. Esto evita que la gráfica de $f$ tenga un salto o escalón en $x = p$, como el escalón que tiene la gráfica de la función de la figura 0.1 en $x = 0$.

(b) Si $f$ es continua en $p$, además de que los límites laterales $\lim_{x\to p^+} f(x)$ y $\lim_{x\to p^-} f(x)$ existen y son iguales, son iguales a $f(p)$. Esto evita que la gráfica de $f$ tenga un agujero en $x = p$, como el agujero que tiene la gráfica de la función de la figura 0.2 en $x = 3$.

En resumen, si $f$ es continua en $p$, entonces la gráfica de $f$ no tiene ni saltos ni agujeros en $x = p$, de ahí el adjetivo de «continua».

---

Tanto los polinomios como las funciones racionales, las funciones trigonométricas, la función logaritmo natural, la exponencial, la función raíz $n$-ésima y la función valor absoluto son continuas (en su dominio).

---

De la proposición que dice como se opera con límites obtenemos el siguiente resultado.

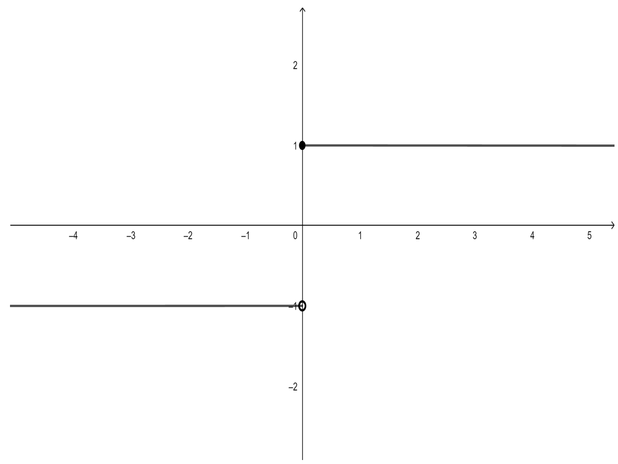


**Figura 0.1** La gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$ tiene un salto en $x = 0$.

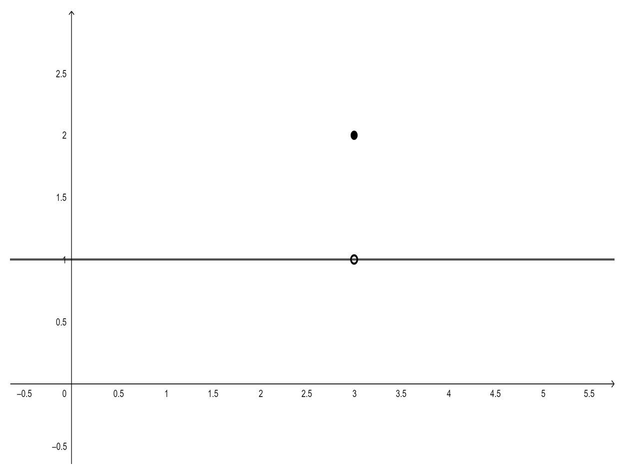


**Figura 0.2** La gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq 3, \\ 2, & \text{si } x = 3, \end{cases}$ tiene un agujero en $x = 3$.

**Proposition 1.** ***(Operaciones con funciones continuas)*** *Sean $f$ y $g$ funciones definidas en un intervalo (o en una unión de intervalos) $I$ que contiene a $p$.*

*(a) Si $f$ y $g$ son continuas en $p$, entonces $f+g$, $f-g$, $fg$ y $f/g$ (si $g(p) \neq 0$) son continuas en $p$.*

*(b) Si $f$ y $g$ son continuas, entonces $f+g$, $f-g$, $fg$ y $f/g$ (en su dominio) son continuas en $p$.*

Ahora nos toca hablar de la continuidad de la composición de funciones.

**Proposition 2.** ***(Continuidad de la composición de funciones)***
*(a) Si $f$ es continua en $p$ y $g$ es continua en $f(p)$, entonces $f \circ g$ es continua en $p$.*
*(b) Si $f$ y $g$ son continuas, entonces $f \circ g$ es continua.*

Con las proposiciones 1 y 2 podemos construir un buen número de funciones continuas. Por ejemplo la función monstruosa

$$\sqrt{\frac{\sqrt[7]{8x^6+\sin^2(x)}\ln\left(\left|1-x^{10}\right|\right)\left(11x^3-4x\right)}{e^{\sin\left(100\sqrt{1+x^4}\right)}+\frac{\cos^4\left(3+6x-45x^2\right)}{1+4x^6}}}+\left|\frac{x^{70-x^4}\cos\left(x^5+3x^4-46\right)}{\sqrt[3]{\left|9x^8e^x+1\right|}+11}\right|$$

es una función continua (en su dominio).

Dedicaremos el resto de esta sección a estudiar tres de los teoremas más importantes sobre la continuidad, los teoremas de la función acotada, del mínimo y máximo, y el teorema del valor intermedio. Necesitamos primero introducir la siguiente definición.

**Definition 2. (Función acotada).** Sean $f$ una función y $A \subset \operatorname{dom}(f)$.

(a) Diremos que $f$ *es acotada en* $A$ si existe $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M \text{ para toda } x \in A.$$

1. Diremos que $f$ es *acotada* si $f$ es acotada en su dominio.

**Theorem 1.** ***(Teorema de la función acotada)*** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $f$ es continua, entonces $f$ es acotada.*

A continuación introducimos los conceptos de mínimo y máximo de una función.

**Definition 3. (Valores mínimo y máximo de una función )** Sean $A$ un subconjunto de $\mathbb{R}$. Consideremos una función $f : A \to \mathbb{R}$.

(a) Diremos que $f(p)$ es el *mínimo* de $f$ (o el *mínimo global* de $f$) si

$$f(p) \leq f(x) \text{ para todo } x \in A.$$

En este caso se dice que el mínimo de $f$ se alcanza en $a$.

(b) Diremos que $f(p)$ es el *máximo* de $f$ (o el *máximo globa*l de $f$) si

$$f(x) \leq f(p) \text{ para todo } x \in A.$$

En este caso se dice que el máximo de $f$ se alcanza en $p$.

---

En figura 0.3, 3 y 10 son los valores mínimo y máximo de la función $f$, respectivamente. No todas las funciones tienen mínimo o máximo. La figura 0.4 muestra funciones que no tienen mínimo o máximo o ni mínimo ni máximo.

**Figura 0.3** 3 y 10 son los valores mínimo y máximo de la función $f$, respectivamente.

**Figura 0.4** Gráficas de funciones que no tienen mínimo o máximo o ni mínimo ni máximo.

---

**Theorem 2.** ***(Teorema del mínimo y máximo)*** *Consideremos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $f$ es continua, entonces $f$ tiene mínimo y máximo.*

Como veremos en el próximo capítulo, la existencia de un mínimo o máximo de una función es importante en las aplicaciones. Más adelante veremos métodos para encontrar mínimos y máximos de una función una vez que sabemos de su existencia.

**Theorem 3.** ***(Teorema del valor intermedio)*** *Consideremos* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Si* $f$ *es continua y* $c$ *es un número con*

$$f(a) < c < f(b) \ \text{ o } f(b) < c < f(a),$$

*entonces existe* $x \in (a, b)$ *tal que*

$$f(x) = c.$$

En los tres teoremas anteriores, la continuidad de la función $f$ es crucial para asegurar las conclusiones.

Como una aplicación del teorema del valor intermedio veamos el ejemplo siguiente.

*Example 1.* **(Solución de ecuaciones)** Como una aplicación del teorema del valor intermedio mostraremos que la ecuación

$$2x^{537} + 8\ln\left(1 + x^2\right)\sin(1 - x) = -3(1 - x)^{97} \tag{0.2}$$

tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$. En efecto, sea $f(x) = 2x^{537} + 8\ln\left(1 + x^2\right)\sin(1 - x) + 3(x - 1)^{97}$. Puesto que

$$f(0) = -3 < 0 < 2 = f(1),$$

por el teorema del valor intermedio existe $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = 0$, lo cual es equivalente a que $x$ sea solución de la ecuación (0.2). $\square$

## 0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

Espero que ahora tengas claro el significado geométrico de la continuidad de una función en un punto. Si es así, te quedará claro la razón del adjetivo «continua.» Como recordarás, no todas las funciones $f$ tienen la propiedad de que para calcular $\lim_{x\to p} f(x)$ simplemente hay que evaluar $f$ en $p$, las funciones continuas son precisamente las funciones que tienen esa propiedad. Es importante tener presente lo anterior.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

# Referencias


1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.