Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 16

(La derivada, su interpretación geométrica y física. Derivabilidad implica continuidad)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 16!

Al fin iniciaremos el estudio de la derivada de una función. El contenido de las clases anteriores nos servirá como andamiaje para tal estudio. En esta y en las clases restantes verás como la derivada es una herramienta muy poderosa sobre todo en las aplicaciones. Entre otras cosas verás como la derivada nos permite definir y estudiar la velocidad de un objeto, tema fundamental en la Física, y verás como la derivada te permite optimizar y analizar procesos de diversa índole. Finalmente, aprenderás que para que una función sea derivable en un punto, tiene que ser continua en ese punto. Este resultado nos permite descartar muchas funciones cuando estamos en la búsqueda de funciones derivables.

¡Comencemos!

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 16.

Definition 1. (Derivada de una función) Sea f una función definida en un intervalo abierto I que contiene a x. Definimos la *derivada* de f en x como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{0.1}$$

si el límite existe. Si $f'(x)$ existe diremos que f es *derivable* o *diferenciable* en x, y si f es derivable en cada x de I diremos que f es derivable o diferenciable. La función $f(x)$ induce entonces la función $f'(x)$ cuyo dominio es el conjunto de todos los x tales que $f'(x)$ existe. A la función f' le llamaremos la derivada de f.

Notación Otras notaciones para la derivada $f'(x)$ son

$$\frac{df}{dx}(x), \quad \frac{df(x)}{dx} \quad \frac{d}{dx}f(x) \text{ y } \dot{f}(x).$$

Antes de continuar surge la siguiente pregunta. ¿qué significa o representa la derivada de una función?

Interpretación Geométrica de la Derivada

Consideremos una función f definida en un intervalo abierto I que contiene a x (véase la figura 0.1). Por simplicidad tomaremos $h > 0$. La situación en el caso en que $h < 0$ es similar. Consideremos la recta l_h que pasa por los puntos $(x, f(x))$ y $(x+h, f(x+h))$. La pendiente de la recta l_h es

$$m(l_h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Notemos que el cociente anterior es el cociente que aparece en la definición de $f'(x)$. Si $f'(x)$ existe, es decir, si el límite (0.1) existe, y hacemos h cada vez más pequeño, entonces las pendientes de las rectas l_h se irán aproximando a la pendiente de la recta T que pasa por el punto $(x, f(x))$ y tiene pendiente $f'(x)$. Esta situación nos motiva a dar un nombre especial a la recta T.

Definition 2. (Recta tangente a la gráfica de una función) Sea f una función derivable en x. Definimos la *recta tangente a la gráfica de f en el punto* $(x, f(x))$ como la recta que pasa por el punto $(x, f(x))$ y tiene pendiente $f'(x)$.

Con está definición, la interpretación geométrica de la derivada es la siguiente.

Interpretación Geométrica de la Derivada
$f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

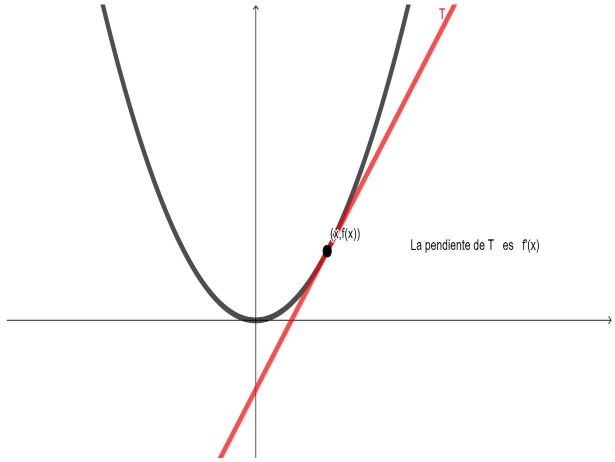

Figura 0.1 Interpretación geométrica de la derivada. La recta T tiene pendiente $f'(x)$.

Example 1. **(Ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función)** Encuentra la ecuación de la recta tangente T a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $(2, f(2)) = (2, 4)$ (véase la figura 0.2).

Solución Sabemos de la interpretación geométrica de la derivada que $f'(2)$ es la pendiente de T. Puesto que $f'(x) = 2x$, entonces la pendiente de T es $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$. Como también sabemos que T pasa por el punto $(2, 4)$, entonces (por la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta) la ecuación de la recta T es

$$\frac{y-4}{x-2} = 4.$$

Simplificando obtenemos que la ecuación de la recta T es

$$y = 4x - 4.$$

Interpretación Física de la Derivada

Supongamos que un objeto, por ejemplo un automóvil, se mueve en linea recta desde un punto A hasta un punto B y que la distancia entre A y B es de 200 km (véase la figura 0.3). Si el objeto tarda 2 horas en llegar desde el punto A hasta el punto B, entonces según la fórmula de la velocidad media

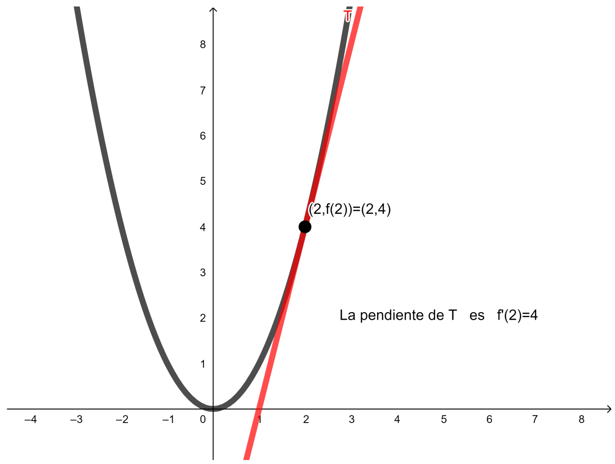

Figura 0.2 Gráfica de la función $f(x) = x^2$ y de su recta tangente T en el punto $(2, 4)$.

$$v_m = \frac{\text{posición final} - \text{posición inicial}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

que aprendimos en nuestras clases de física elemental, la velocidad media del objeto desde el inicio hasta el final del trayecto es de 100 km/h. Como su nombre lo indica, la velocidad media es un promedio de la velocidad durante todo el trayecto del objeto y no nos da información de como se comportó el objeto en un instante dado t_0. Sea $s(t)$ la posición del objeto en el tiempo t. Si $h > 0$, entonces la velocidad media del objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ es

$$v_h = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}.$$

Intuitivamente, si $[t_0, t_0 + h]$ es un intervalo de tiempo pequeño (digamos 3 segundos), entonces la velocidad media del objeto en ese intervalo dará una mejor descripción del comportamiento del objeto en el instante t_0 que la velocidad media del objeto durante todo el trayecto. Si hacemos h cada vez más pequeño, entonces la velocidad media v_h del objeto en el intervalo $[t_0, t_0 + h]$ proporcionará cada vez una mejor descripción del comportamiento del objeto en el instante t_0. Es natural dar entonces la siguiente definición.

Definition 3. (Velocidad instantánea) Sea $s(t)$ la posición de un objeto que se mueve en linea recta en el instante t. Definimos la *velocidad* (instantánea) del objeto en el instante t_0, denotada por $v(t_0)$, como el límite de las velocidades medias v_h del objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$, en símbolos,

$$v(t_0) = \lim_{h \to 0} v_h = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}.$$

Puesto que

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h} = s'(t_0),$$

entonces la interpretación física de la derivada es la siguiente:

Interpretación Física de la Derivada
La derivada de la función de posición de un objeto, $s'(t)$, es la velocidad instantánea del objeto en el instante t.

Figura 0.3 Interpretación física de la derivada.

0.2.1. Derivabilidad y Continuidad

Proposition 1. ***(Derivabilidad implica continuidad)*** *Si f es derivable en p, entonces f es continua en p.*

Demostración. Sabemos que la continuidad de f en p es equivalente a que

$$\lim_{h\to 0} f(p+h) - f(p) = 0$$

Puesto que f es derivable en p, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} f(p+h) - f(p) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\right]h \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\right]\cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f'(p)\cdot 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

así, f es continua en p. $\square$

Remark 1. Por la proposición anterior, si f no es continua en p, entonces f no es derivable en p. Así, si la gráfica de una función tiene un salto o tiene un agujero por encima del punto $(p, 0)$, entonces f no es derivable en p (véase la figura 0.4).

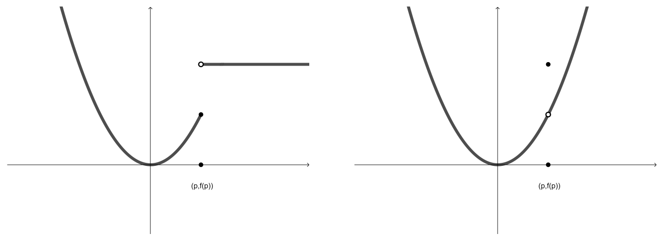

Figura 0.4 Si la gráfica de f tiene un salto o tiene un agujero por encima del punto $(p, 0)$, entonces f no es derivable en p.

El recíproco de la proposición 1 no es cierto, es decir, no es cierto que si una función es continua en p, entonces es derivable en p, como lo muestra el ejemplo siguiente.

Example 2. **(La función $|x|$ es continua en 0 y no es derivable en 0)** Ya sabemos que la función $f(x) = |x|$ es continua en 0. Para mostrar f no es derivable en cero hay que mostrar que $f'(0)$ no existe, para lo cual mostraremos que los límites laterales asociados con el límite que define a $f'(0)$ son diferentes. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-} -1\\ &= -1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|x|$ no es derivable en 0. [1]

Remark 2. Geométricamente, lo que hace que la función $|x|$ no sea derivable en 0 es que su gráfica tiene un pico en el origen (véase la gráfica de la función $|x|$). En general, si la gráfica de una función f tiene un pico en el punto $(p, f(p))$, entonces la función no será derivable en p (véase la figura 0.5).

Figura 0.5 La gráfica de la función f tiene un pico en el punto $(p, f(p))$ y en consecuencia no es derivable en p.

Reuniendo las observaciones 1 y 2 obtenemos que si la gráfica de f tiene un salto o un agujero por encima del punto $(p, 0)$ o tiene un pico en el punto $(p, f(p)$, entonces la función no es derivable en p (véase la figura 0.6).

Figura 0.6 La función f no es derivable en p_1,p_2 y p_3.

[1] La función valor absoluto si es derivable en los puntos distintos de cero. De hecho

$$(|x|)' = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0,\\ -1, & \text{si } x < 0,\\ \text{no existe} & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

Como viste en en esta clase, la derivada se define como cierto límite. Esta es la razón de que previamente los estudiemos. Ahora ya sabes que significa o que interpretación tiene la derivada. Más adelante veremos como calcular derivadas, pero no es apropiado saber calcularlas sin saber qué significan o para que sirven. Además de lo anterior, en esta sección aprendiste que si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.