Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 17

(Cálculo de derivadas. Derivación implícita.)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 17!

Ahora toca el turno del cálculo de derivadas. Calcularemos primero algunas derivadas mediante la definición, luego daremos una lista de algunas derivadas comunes y finalmente veremos como combinar derivadas conocidas para obtener la derivada de funciones más complicadas. Además de lo anterior calcularás la derivada de funciones que están definidas implícitamente por una ecuación.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 17.

0.2.1. Cálculo de Derivadas

Example 1. **(Derivada de una función constante)** Sea $f(x) = c$ una función constante. Según la definición de derivada tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así la derivada de una función constante es la función constante 0.

Example 2. **(Derivada de la función identidad)** Sea $f(x) = x$ la función identidad. Según la definición de derivada tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Así la derivada de una función identidad $f(x) = x$ es la función constante 1.

Example 3. **(Derivada de la función $f(x) = x^2$)** Sea $f(x) = x^2$. Según la definición de derivada tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + h \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Así la derivada de una función $f(x) = x^2$ es la función $2x$.

A continuación hacemos una recopilación de derivadas comunes que usaremos frecuentemente.

Derivadas elementales

Derivadas Elementales	
Función	**Derivada**
$f(x) = c$	0
x	1
x^n	nx^{n-1}

Derivadas de las funciones trigonométricas

Derivadas de las Funciones Trigonométricas	
Función	**Derivada**
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$

Derivada de la función logaritmo y de la exponencial

Derivada de la Función Logaritmo y de la Exponencial	
Función	**Derivada**
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Derivada de las raíz n-ésima

Derivada de las raíz n-ésima	
Función	**Derivada**
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

Ahora veremos como combinar derivadas conocidas para obtener la derivada de funciones más complicadas.

Proposition 1. ***(Álgebra de derivadas)*** *Si f y g son derivables en x, entonces $f+g$, $f-g$, fg y f/g (si $g(x) \neq 0$) son derivables en x y*

(a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

(b) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

(c) $(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$.

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ *(si $g(x) \neq 0$).*

Remark 1. Como consecuencia del inciso (c) de la proposición anterior tenemos que la derivada de la función $cf(x)$ es $cf'(x)$, en efecto,

$$(cf(x))' = c'f(x) + cf'(x) = cf'(x),$$

pues la derivada de la función constante c es cero.

Además de la proposición 1, también tenemos la famosa regla de la cadena para hallar la derivada de una composición de funciones.

Proposition 2. ***(Regla de la cadena)*** *Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces $f \circ g$ es derivable en x y*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

El nombre «de la cadena» proviene de la regla para la derivada de una composición de funciones de varias variables. En algunos casos, la expresión de la regla de la cadena para funciones de varias variables tiene un un patrón que asemeja a una cadena. En lector interesado en esta regla para funciones de varias variables puede consultar por ejemplo [?] o [?].

Toca el turno del cálculo de la derivada de una función inversa.

Proposition 3. ***(Derivada de la función inversa)*** *Sea f una función continua e invertible. Si f es derivable en $f^{-1}(x)$ y $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$, entonces f^{-1} es derivable en x y*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Veamos algunos ejemplos del cálculo de derivadas.

Example 4. Calcula la derivada de la función $3x^5$.

Solución Por la observación 1 y de la fórmula de la derivada de x^n resulta que

$$\begin{aligned} \left(3x^5\right)' &= 3\left(x^5\right)' \\ &= 3 \cdot 5x^4 \\ &= 15x^4. \end{aligned}$$

Example 5. Calcula la derivada de la función $7x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 11x + 23$.

Solución Por la proposición 1 tenemos que

$$\begin{aligned}\left(7x^4-5x^3+9x^2-11x+23\right) &= \left(7x^4\right)'-\left(5x^3\right)'+\left(9x^2\right)'-(11x)'+(23)' \\ &= 7\left(x^4\right)'-5\left(x^3\right)'+9\left(x^2\right)'-11\,(x)'+(23)' \\ &= 7\cdot 4x^3-5\cdot 3x^2+9\cdot 2x-11\cdot 1+0 \\ &= 28x^3-15x^2+18x-11.\end{aligned}$$

En general se tiene que la derivada de un polinomio

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$

es

$$a_1+2a_2x+3a^2+\cdots+na_nx^{n-1}.$$

Example 6. Calcula la derivada de $\left(6x^7+x-1\right)\left(x^2+8x\right)$.

Solución Tenemos dos opciones para calcular la derivada de esta función. La primera es desarrollar el producto para obtener un polinomio y proceder como en el ejemplo anterior. La segunda es emplear la regla para la derivada de un producto de la proposición1. Procederemos con la segunda opción, el lector puede elegir la primera opción y comparar el resultado con el dado aquí. Por la la regla para la derivada de un producto resulta que

$$\begin{aligned}\left[\left(6x^7+x-1\right)\left(x^2+8x\right)\right]' &= \left(6x^7+x-1\right)'\left(x^2+8x\right)+\left(6x^7+x-1\right)\left(x^2+8x\right)' \\ &= \left(42x^6\right)\left(x^2+8x\right)+\left(6x^7+x-1\right)(2x+8) \\ &= 42x^8+336x+12x^8+48x^7+2x^2+8x-2x-8 \\ &= 54x^8+48x^7+2x^2+342x-8.\end{aligned}$$

Example 7. Calcula la derivada de $\frac{\sin(x)-x}{2x^3+x^2+e^x}$.

Solución Por la regla de la derivada de un cociente de la proposición 1 y de las fórmulas de la derivada de las funciones seno y exponencial obtenemos que

$$\left(\frac{\sin(x)-x}{2x^3+x^2+e^x}\right)' = \frac{(\sin(x)-x)'\left(2x^3+x^2+e^x\right)-(\sin(x)-x)\left(2x^3+x^2+e^x\right)'}{\left[2x^3+x^2+e^x\right]^2}$$
$$= \frac{(\cos(x)-1)\left(2x^3+x^2+e^x\right)-(\sin(x)-x)\left(6x^2+2x+e^x\right)}{\left[2x^3+x^2+e^x\right]^2}.$$

Example 8. Calcula la derivada de $\sin\left(1+x^2\right)$.

Solución Notemos que en este caso no podemos usar la proposición 1. Puesto que $\sin\left(1+x^2\right)$ es una composición de funciones, usaremos la regla de la cadena. Si $f(x)=\sin(x)$ y $g(x)=1+x^2$, entonces

$$\sin\left(1+x^2\right)=f(g(x)).$$

En consecuencia, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\left[\sin\left(1+x^2\right)\right]' &= [f(g(x))]' \\ &= f'(g(x))\cdot g'(x) \\ &= \cos\left(1+x^2\right)(2x).\end{aligned}$$

Example 9. Calcula la derivada de la función $\sin^2(x)$. [1]

Solución Puesto que $\sin^2(x)$ es una composición de funciones, usaremos la regla de la cadena. Si $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sin(x)$, entonces

$$\sin^2(x)=f(g(x)).$$

En consecuencia, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\left[\sin^2(x)\right]' &= [f(g(x))]' \\ &= f'(g(x))\cdot g'(x) \\ &= 2\sin(x)\cdot\cos(x).\end{aligned}$$

[1] Recordemos que $\sin^2(x)$ es una notación para $[\sin(x)]^2$.

Example 10. Calcula la derivada de la función $\ln\left(x+3x^2\right)+3\sqrt{1+x^2}$

Solución Por la regla de la cadena y la proposición 1 resulta que

$$\begin{aligned}\left[\ln\left(x+3x^2\right)+3\sqrt{1+x^2}\right]' &= \left[\ln\left(x+3x^2\right)\right]' + \left[\sqrt{1+x^2}\right]' \\ &= \frac{1+6x}{x+3x^2}+\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1/2}(2x) \\ &= \frac{1+6x}{x+3x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

Example 11. Definamos $f(x)=e^{x+x^3}$. Puesto que f es una función 1-1 (verifícalo), sabemos que f^{-1} existe. Calcula $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Solución Notemos primero que $f(0)=1$, así que $f^{-1}(1)=0$. Por la proposición 3 obtenemos que

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} \\ &= \frac{1}{f'(0)} \\ &= 1. \ \square\end{aligned}$$

0.2.2. Derivación Implícita

Hasta ahora hemos trabajado con funciones cuya regla de correspondencia ha sido dada de manera explícita, por ejemplo $f(x)=x^2+1$ o $y=x^2+1$. En este caso, en la ecuación $y=x^2+1$, la función y aparece despejada. Sin embargo podemos definir una función y de manera implícita mediante una ecuación, por ejemplo, la ecuación

$$y^3+3y-2x=0 \tag{0.1}$$

define una función y pues a cada x la ecuación (0.1) le asigna un único valor y. En este caso, en la ecuación (0.1) la función y no aparece despejada. Esta es la razón por la cual se dice que la función y está dada de manera implícita. La siguiente tabla muestra algunos valores de la función y.

Valores de la función y definida por la ecuación (0.1).	
x	y
0	0
2	1
7	2

No toda ecuación en las variables x y y define una función y. Por ejemplo la ecuación

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{0.2}$$

no define una función y, pues la ecuación (0.2) asigna al numero 0 dos valores para y, el 1 y el -1 (véase la figura 0.1). Para obtener una función y a partir de la ecuación (0.2) podemos por ejemplo considerar las partes superior R_1 e inferior R_2 de la gráfica de (0.2) (véase la figura 0.2). Así la parte R_1 genera la función

$$y_1 = \sqrt{1 - x^2}$$

y la parte 2 a la función

$$y_2 = -\sqrt{1 - x^2}.$$

De aquí en adelante, si decimos que y es una función definida implícitamente por una ecuación en las variables x y y, supondremos que hemos cortado a la gráfica de tal ecuación en partes $R_1, ..., R_n$ y que la función y es una de las funciones generadas por $R_1, ..., R_n$.

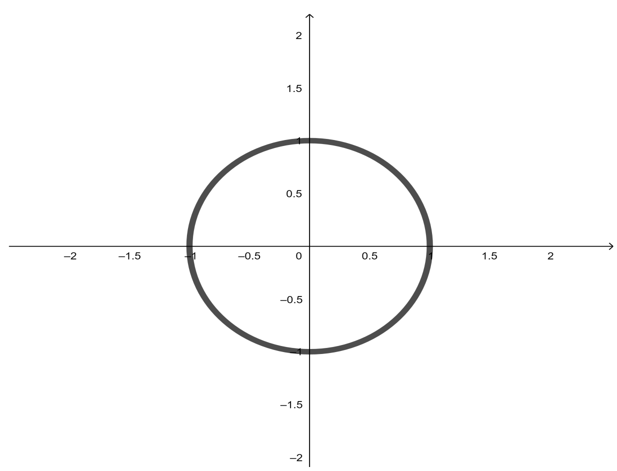

Figura 0.1 Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

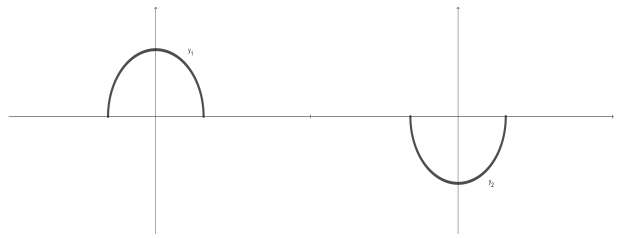

Figura 0.2 Podemos partir a la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ para obtener dos funciones y_1 y y_2.

Definition 1. (Derivación Implícita) Al proceso de encontrar la derivada de una función definida de manera implícita se le llama *derivación implícita*.

Ahora veamos como se deriva una función definida de manera implícita. La mejor manera de mostrar esto es con un ejemplo.

Example 12. **(Derivación implícita)** Encuentra la derivada de la función y definida implícitamente por la ecuación

$$y^3 + 3xy - 2x = 0. \tag{0.3}$$

Solución Notemos primero que como y es una función de x, entonces por la regla de la cadena

$$\left(y^3\right)' = 3y^2 \cdot y',$$

y que por la fórmula de la derivada de un producto,

$$\begin{aligned} (3xy)' &= 3\,(xy)' \\ &= 3\,(x'y + xy') \\ &= 3\,(y + xy') \\ &= 3y + 3xy'. \end{aligned}$$

En consecuencia, al derivar ambos lados de la ecuación (0.3) obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left(y^3 + 3xy - 2x\right)' \\ &= \left(y^3\right)' + (3xy)' - (2x)' \\ &= 3y^2 \cdot y' + 3y + 3xy' - 2 \\ &= y'\left(3y^2 + 3x\right) + 3y - 2 \text{ (factorizando } y'). \end{aligned}$$

Luego, al despejar y' obtenemos que

$$y' = \frac{2-3y}{3y^2+3x}.$$

Example 13. Encuentra la ecuación de la recta tangente T a la gráfica de la elipse

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \left(y - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 = 1. \tag{0.4}$$

en el punto $(4,1)$(véase la figura 0.3).

Solución Podemos escribir la ecuación (0.4) como

$$(x-3)^2 + 4\left(y - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4. \tag{0.5}$$

Al derivar implícitamente a y en la ecuación (0.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left[(x-3)^2 + 4\left(y-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]' \\ &= \left[(x-3)^2\right]' + 4\left[\left(y-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]' \\ &= 2(x-3) + 4\cdot 2\left(y-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot y'. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2(3-x)}{8\left(y-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \frac{3-x}{4\left(y-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \\ &= \frac{3-x}{4y-4-2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Si $x=4$,entonces $y=1$, y en consecuencia y' evaluada en 4 es

$$y' = \frac{3-4}{4-4-2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}..$$

Como y' evaluada en 4 es la pendiente de T, y T pasa por el punto $(4,1)$, entonces (según la ecuación de la forma punto pendiente de la recta) la ecuación de T es

$$\frac{y-1}{x-4} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Simplificando,obtenemos que la ecuación de T es

$$y = \frac{x}{2\sqrt{3}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Figura 0.3 Elipse $(x-3)^2 + 4\left(y - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4$ y su recta tangente T en $(4,1)$.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

En esta clase conociste las derivadas de muchas funciones de uso común. Más aún, ya eres capaz de calcular la derivada de una suma, resta, producto, cociente y composición de funciones. También aprendiste a calcular la derivada de una función inversa. Además de lo anterior, ya eres capaz de calcular la derivada de funciones que están definidas implícitamente por una ecuación, este proceso de calcular derivadas es la famosa derivación implícita.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.