Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 18

(Aplicaciones de la derivada I)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 18!

Estamos listos para ver el poder de la derivada. En esta clase conocerás el teorema del valor medio y sus aplicaciones. Entre otras cosas estudiarás a los mínimos y máximos locales de una función, a las funciones crecientes, decrecientes y a la concavidad de una función. Los conceptos y herramientas que aprenderás en esta clase te permitirán analizar más a fondo el comportamiento de una función.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 18.

0.2.1. Máximos y Mínimos Locales

Iniciamos con la siguiente definición.

Definition 1. (Mínimos y máximos locales) Sea f una función.

(a) Diremos que $f(p)$ es un *mínimo local* de f si existe un intervalo abierto I que contiene a p tal que

$$f(p) \leq f(x) \text{ para todo } x \in I.$$

En este caso se dice que f alcanza un mínimo local en a.

(b) Diremos que $f(p)$ es un *máximo local* de f si existe un intervalo abierto I que contiene a p tal que

$$f(x) \leq f(p) \text{ para todo } x \in I.$$

En este caso se dice que f alcanza un máximo local en a.

La figura 0.1 muestra algunos mínimos y máximos locales de una función y los puntos donde se alcanzan.

Figura 0.1 Mínimos y máximos locales

La siguiente proposición será de gran ayuda para encontrar los máximos y mínimos locales de una función.

Proposition 1. *Sea f una función definida en un intervalo abierto I. Si f alcanza un mínimo local o máximo local en p, entonces $f'(p) = 0$ o $f'(p)$ no existe (véase la figura 0.2).*

(a) (b)

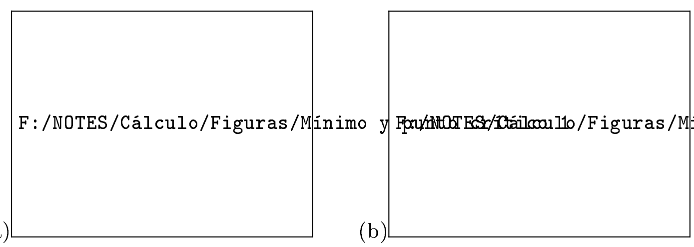


Figura 0.2 (a) La función $f(x) = x^2$ alcanza un mínimo local en 0 y $f'(0) = 0$. (b) La función $f(x) = |x|$ alcanza un mínimo local en 0 y $f'(0)$ no existe.

Entre otras cosas, por la proposición anterior, los puntos p tales que $f'(p) = 0$ o $f'(p)$ no existen merecen un nombre especial.

Definition 2. (Punto crítico) Diremos que p es un *punto crítico* de f si

$$f'(p) = 0 \text{ o si } f'(p) \text{ no existe.}$$

Más adelante veremos como calcular los mínimos y máximos locales de una función.

0.2.2. El Teorema del Valor Medio

Como consecuencia del teorema del mínimo y máximo y de la proposición 1 obtenemos el teorema del valor medio, uno de los teoremas más importantes sobre la derivada.

Theorem 1. ***(del valor medio)*** *Sea f continua en un intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

El significado geométrico del teorema del valor medio (véase la figura 0.3) es que existe $c \in (a,b)$ tal que la recta que pasa por el punto $(c, f(c))$ y tiene pendiente $f'(c)$ y la recta que une a los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tienen la misma pendiente.

Figura 0.3 Significado geométrico del teorema del valor medio

0.2.3. Funciones Crecientes y Decrecientes

Para ver una aplicación clásica del teorema del valor medio necesitamos la siguiente definición.

Definition 3. (Funciones crecientes y decrecientes) Sea f definida en un intervalo I.

(a) Diremos que f es creciente en I si

$$x < y \text{ implica que } f(x) < f(y).$$

(b) Diremos que f es monótona creciente en I si

$$x < y \text{ implica que } f(x) \leq f(y).$$

(c) Diremos que f es decreciente en I si

$$x < y \text{ implica que } f(x) > f(y).$$

(d) Diremos que f es monótona decreciente en I si

$$x < y \text{ implica que } f(x) \geq f(y).$$

(e) Diremos que f es monótona si f satisface (c) o (d).

La figura 0.4 muestra la gráfica de algunas funciones crecientes y decrecientes, y de algunas funciones monótonas.

Figura 0.4 Gráfica de algunas funciones crecientes y decrecientes, y de algunas funciones monótonas.

Como consecuencia del teorema del valor medio obtenemos el siguiente corolario.

Corollary 1. *Sea f derivable en un intervalo abierto I. Se cumple lo siguiente.*

(a) Si $f'(x) > 0$ en I, entonces f es creciente en I.
(b) Si $f'(x) < 0$ en I, entonces f es decreciente en I.
(c) Si $f'(x) = 0$ en I, entonces f es constante en I.

De igual manera obtenemos el siguiente corolario.

Corollary 2. *Sea f derivable en un intervalo abierto I. Se cumple lo siguiente.*

(a) Si $f'(x) \geq 0$ en I, entonces f es monótona creciente en I.
(b) Si $f'(x) \leq 0$ en I, entonces f es monótona decreciente en I.

Como aplicación de los corolarios 1 y 2 consideremos el ejemplo siguiente.

Example 1. Se cumple lo siguiente (véase la figura 0.5).

1. $x \leq \sin(x)$ para todo $x \in (-\infty, 0]$.
2. $\sin(x) \leq x$ para todo $x \in [0, \infty)$.
3. $\tan(x) \leq x$ para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.
4. $x \leq \tan(x)$ para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

En efecto, definamos

$$f(x) = \sin(x) - x.$$

Como

$$f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0,$$

entonces por el corolario 2 obtenemos que f es monótona decreciente en $\mathbb{R}$. Por lo cual,

$$\text{si } x \leq 0, \text{ entonces } f(x) \geq f(0)$$

y

$$\text{si } 0 \leq x, \text{ entonces } f(0) \geq f(x),$$

F:/NOTES/Cálculo/Figuras/Gráficas de tan(x), x y sin(x)

Figura 0.5 Gráficas de las funciones $\tan(x)$, x y $\sin(x)$.

de lo cual se siguen los incisos 1 y 2. La prueba de los incisos 3 y 4 es similar y se deja como ejercicio.

A continuación usaremos el corolario 1 para determinar los intervalos abiertos donde una función f definida en un intervalo I (con f' continua en I) es creciente o decreciente. En este tipo de problemas procederemos de la siguiente manera: [1]

1. Encontrar los puntos críticos de f que están en I.
2. Considerar los intervalos abiertos determinados por los puntos críticos del inciso 1.[2]
3. Determinar el signo de f' en los intervalos del inciso 2. [3]
4. Usar el corolario 1 en los intervalos del inciso 3 para determinar los intervalos donde f es creciente o decreciente.

[1] Usaremos este método para funciones derivables con un conjunto finito de puntos críticos.

[2] Por ejemplo si f está definida en $[a, b)$ y si a, -2, 5 y 8 son los puntos críticos de f que están en $[a, b)$, entonces los intervalos generados por estos puntos críticos son los intervalos $(a, -2)$, $(-2, 5)$, $(5, 8)$ y $(8, b)$.

[3] Como el signo de $f'(x)$ es constante en cada uno de los intervalos del inciso (b) (¿por qué?), entonces para determinar el signo de la derivada en cada uno de estos intervalos basta tomar un punto de prueba p en cada uno de ellos y ver el signo de f' en p.

Example 2. Encuentra los intervalos donde la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ es creciente o decreciente.

Solución

1. Encontrar los puntos críticos de f : Notemos que $f'(x) = 3x^2 + 8x$. Así,
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 + 8x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(3x+8) = 0 \\ &\Leftrightarrow = 0 \text{ o } x = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$
Por lo cual los puntos críticos de f son 0 y $-8/3$.
2. Considerar los intervalos generados por los puntos críticos: $(-\infty, -8/3)$, $(-8/3, 0)$ y $(0, \infty)$.
3. Determinar el signo de f' en los intervalos del inciso 2: Consideremos el esquema siguiente.

Intervalo J	**Punto de prueba p en J**	**Signo de $f'(p)$**	**Signo de f' en J**
$(-\infty, -8/3)$	-3	$+$	$+$
$(-8/3, 0)$	-2	$-$	$-$
$(0, \infty)$	1	$+$	$+$

4. Usar el corolario 1: f es creciente en $(-\infty, -8/3)$, decreciente en $(-8/3, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$ (véase la figura 0.6). □

0.2.4. Concavidad y Puntos de Inflexión

En la sección pasada vimos un procedimiento para encontrar los intervalos abiertos en los que una función derivable es creciente o decreciente. Supongamos por un momento que tal criterio nos dice que una función f es creciente en el intervalo (a, b). Entonces la gráfica de la función f podría ser por ejemplo como la gráfica (a) o como la gráfica (b) de la figura 0.7.

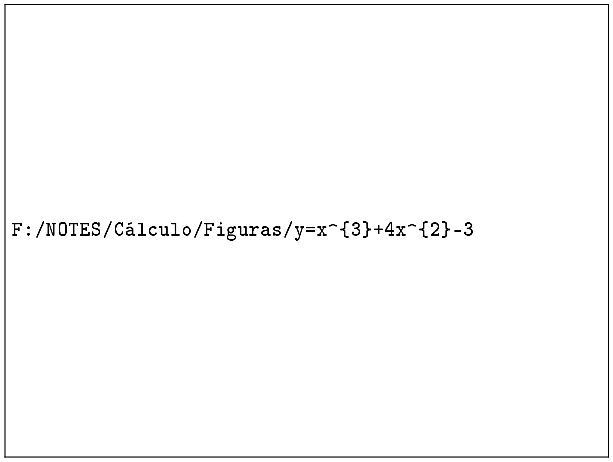
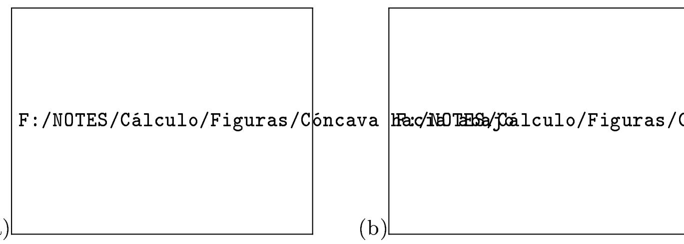


Figura 0.6 Gráfica de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$



(a) (b)

Figura 0.7 Opciones para una función creciente en el intervalo (a, b).

Para determinar cual de estas opciones es la correcta necesitamos primero el concepto de concavidad.

Antes de introducir el concepto de concavidad, necesitamos la siguiente definición.

Definition 4. (Derivadas de orden superior) Sea f una función. Si f' es derivable denotaremos su derivada por f'' y le llamaremos la segunda derivada de f. Si f''es derivable denotaremos su derivada por f''' y le llamaremos la tercera derivada de f, etc. Es costumbre ya no usar la notación con comas para denotar a la cuarta, quinta, sexta, etc., derivadas de f pues esta notación se volvería inconveniente. En su lugar usaremos la siguiente. El símbolo $f^{(0)}$ denotará a la función f y le llamaremos la cero derivada de f. El símbolo $f^{(1)}$ denotará a la derivada de f y le llamaremos la primera derivada de

f. El símbolo $f^{(2)}$ denotará a la derivada de $f^{(1)}$ le llamaremos la segunda derivada de f, etc. Notemos que con esta notación es más fácil expresar $f^{(20)}$ que f''''''''''''''''''''.

Ahora sí, definamos la concavidad.

Definition 5. (Concavidad) Sea f una función definida en un intervalo abierto I.

(a) Diremos que f es cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0$ para todo x en I.
(b) Diremos que f es cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0$ para todo x en I.

De la definición 5 y del corolario 1 obtenemos que una función cóncava hacia abajo en un intervalo abierto I cumple que su derivada f' es decreciente en el intervalo I, y que una función cóncava hacia arriba en un intervalo abierto I cumple que su derivada f' es creciente en el intervalo I. La gráfica de una función cóncava hacia abajo es como la gráfica (a) de la figura 0.7 y la gráfica de una función cóncava hacia arriba es como la gráfica (b) de la misma figura.

Definition 6. (Punto de inflexión) Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a p. Diremos que $(p, f(p))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f si existen intervalos (a, p) y (p, b) tales que f tiene distinta concavidad en los intervalos (a, p) y (p, b).

Por ejemplo, el punto $(0,0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x^3$, pues f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(0, \infty)$ (véase la figura 0.8).

F:/NOTES/Cálculo/Figuras/Punto de inflexión de x^{3}

Figura 0.8 El punto $(0,0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = x^3$. La concavidad de f es diferente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Como otro ejemplo, el punto $(0,0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, pues f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, 0)$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $(0, \infty)$ (véase la figura 0.9).

La siguiente proposición nos ayudará a encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de una función.

Proposition 2. ***(Puntos de inflexión)*** *Sea f definida en un intervalo abierto I que contiene a p. Si f'' es continua en I y $(p, f(p))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(p) = 0$.*

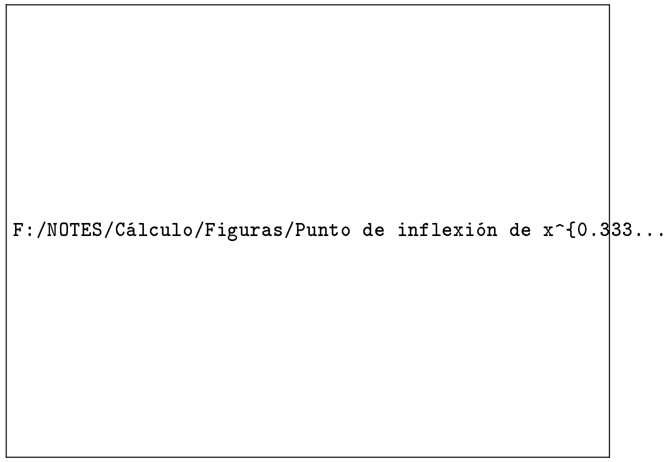


Figura 0.9 El punto $(0,0)$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. La concavidad de f es diferente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

A continuación usaremos la proposición 2 para determinar los intervalos abiertos donde una función f definida en un intervalo I (con f''continua en I) es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, y para encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de f, si existen. En este tipo de problemas procederemos de la siguiente manera:[4]

1. Encontrar los puntos críticos de f' que están en I.
2. Considerar los intervalos abiertos determinados por los puntos críticos del inciso 1.[5]
3. Determinar el signo de f'' en los intervalos del inciso 2. [6]
4. Usar la información del inciso 3 para determinar los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.
5. Usar los intervalos encontrados en el inciso 4 para encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de f.

[4] Usaremos este método para funciones tales que el conjunto $\{x : f''(x) = 0\}$ es finito.

[5] Por ejemplo si f está definida en (a, b) y si -2, 5 y 8 son los puntos x de (a, b) tales que $f''(x) = 0$, entonces los intervalos generados por estos puntos críticos son los intervalos $(a, -2)$, $(-2, 5)$, $(5, 8)$ y $(8, b)$.

[6] Como el signo de $f''(x)$ es constante en cada uno de los intervalos del inciso (b) (¿por qué?), entonces para determinar el signo de la derivada en cada uno de estos intervalos basta tomar un punto de prueba p en cada uno de ellos y ver el signo de f'' en p.

Example 3. Encuentra los intervalos donde la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, y los puntos de inflexión de la gráfica de f.

Solución

1. Encontrar los puntos críticos de f' que están en I : Notemos que $f'(x) = 3x^2 + 8x$ y que $f''(x) = 6x + 8$. Así, $f''(x)$ existe para todo x y

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 6x + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-4}{3}. \end{aligned}$$

   Por lo cual el punto crítico de f' es $-4/3$.
2. Considerar los intervalos abiertos determinados por los puntos críticos del inciso 1: $(-\infty, -4/3)$ y $(-4/3, \infty)$.
3. Determinar el signo de f'' en los intervalos del inciso 2: Consideremos el esquema siguiente.

Intervalo J	**Punto de prueba** p **en** J	**Signo de** $f''(p)$	**Signo de** f'' **en** J
$(-\infty, -4/3)$	-2	$-$	$-$
$(-4/3, \infty)$	0	$+$	$+$

4. Usar la información del inciso 3 para determinar los intervalos donde f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo: f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, -4/3)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(-4/3, \infty)$ (véase la figura 0.10).
5. Usar los intervalos encontrados en el inciso 4 para encontrar los puntos de inflexión de la gráfica de f: $(-4/3, f(-4/3)) = (-4/3, 47/27)$ es el punto de inflexión de la gráfica de f. $\square$

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

En esta clase aprendiste a calcular los intervalos donde una función derivable es creciente o decreciente. Además también aprendiste a encontrar los

F:/NOTES/Cálculo/Figuras/Punto de inflección de x^{3}+4x^{2}-3

Figura 0.10 Gráfica de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$

intervalos donde una función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. Ten presente eso, pues lo usarás en la próxima clase.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.