Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 19

(Aplicaciones de la derivada II)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 19!

Estamos listos para ver el poder de la derivada. En esta sección veremos dos de sus aplicaciones que están relacionadas entre sí, una es el análisis de gráficos y la otra es la optimización. Optimizar un proceso es importante en la ciencia y en la industria. Por ejemplo, en la industria es importante minimizar los costos y al mismo tiempo maximizar los beneficios de la producción de un artículo.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 19.

0.2.1. Criterios de la Primera y Segunda Derivada

Los dos criterios siguientes serán la base fundamental para encontrar los mínimos y máximos locales, si existen, de una función.

Proposition 1. ***(Criterio de la primera derivada)*** *Sea f una función continua en p.*

(a) Si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a p tal que $f'(x) < 0$ si $x \in (a, p)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (p, b)$, entonces $f(p)$ es un mínimo local.
(b) Si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a p tal que $f'(x) > 0$ si $x \in (a, p)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (p, b)$, entonces $f(p)$ es un máximo local.
(c) Si existe un intervalo abierto (a, b) que contiene a p tal que $f'(x) > 0$ si $x \in (a, p)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (p, b)$, entonces $f(p)$ no es ni mínimo ni máximo local.

(d) Si existe un intervalo abierto (a, b) *que contiene a* p *tal que* $f'(x) < 0$ *si* $x \in (a, p)$ *y* $f'(x) < 0$ *si* $x \in (p, b)$, *entonces* $f(p)$ *no es ni mínimo ni máximo local.*

El criterio de la primera derivada se aprecia mejor en el esquema de la figura 0.1.

Figura 0.1 Esquema del criterio de la primera derivada

Ahora enunciamos el criterio de la segunda derivada.

Proposition 2. ***(Criterio de la segunda derivada)*** *Sean* f *una función dos veces derivable en un intervalo abierto* I *y* $p \in I$ *un punto crítico de* f.

(a) Si $f''(p) > 0$, *entonces* $f(p)$ *es un mínimo local.*
(b) Si $f''(p) < 0$, *entonces* $f(p)$ *es un máximo local.*
(c) Si $f''(p) = 0$, *entonces el criterio no aplica.*

A continuación usaremos los criterios de la primera y segunda derivada para determinar los mínimos y máximos locales de una función derivable f definida en un intervalo I. En este tipo de problemas procederemos de la siguiente manera:

1. Encontrar los puntos críticos de f que están en I.
2. Aplicar, si es posible, el criterio de la segunda derivada en los puntos críticos del inciso 1.
3. Si no es posible aplicar el criterio de la segunda derivada en algún punto crítico p, proceder de la siguiente manera:
   (a) Encontrar los intervalos abiertos donde f es creciente o decreciente.
   (b) Aplicar a p el criterio de la primera derivada.

Puesto que los mínimos y máximos locales se alcanzan en puntos críticos, con el proceso anterior se encuentran todos los mínimos locales y máximos locales de f.

Example 1. Encuentra los mínimos locales y máximos locales de la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3$.

Solución

1. Encontrar los puntos críticos de f : Ya trabajamos con la función f en un ejemplo anterior. Ahí mostramos que los puntos críticos de f son 0 y $-8/3$.
2. Aplicar, si es posible, el criterio de la segunda derivada en los puntos críticos del inciso 1: Como $f''(x) = \left(3x^2 + 8x\right)' = 6x + 8$, entonces
$$f''(0) = 8 > 0 \text{ y } f''\left(-\frac{8}{3}\right) = -8 < 0,$$
   entonces por el criterio de la segunda derivada $f(0) = -3$ es un mínimo local de f y $f(-8/3) = 175/27$ es un máximo local de f..

Example 2. Encuentra los mínimos locales y máximos locales de la función $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$.

Solución

1. Encontrar los puntos críticos de f : Como

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = x^2(4x+6),$$

entonces los puntos críticos de f son 0 y $-3/2$.

2. Aplicar, si es posible, el criterio de la segunda derivada en los puntos críticos del inciso 1: Como $f''(0) = 0$ y $f''(-3/2) = 0$ no podemos aplicar el criterio de la primera derivada.
3. Como no es posible aplicar el criterio de la segunda derivada a los puntos críticos, procedemos de la siguiente manera:

(a) Encontrar los intervalos abiertos donde f es creciente o decreciente: Consideremos el esquema siguiente.

Intervalo J	**Punto de prueba** p **en** J	**Signo de** $f'(p)$	**Signo de** f' **en** J
$(-\infty, -3/2)$	-2	$-$	$-$
$(-3/2, 0)$	-1	$+$	$+$
$(0, \infty)$	1	$+$	$+$

Así f es decreciente en $(-\infty, -3/2)$, creciente en $(-3/2, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

(b) Aplicar el criterio de la primera derivada a los puntos críticos 0 y $-3/2$: Por el criterio de la primera derivada, $f(-3/2) =$ es un mínimo local y $f(0)$ no es ni mínimo ni máximo local. $\square$

0.2.2. Máximos y Mínimos Globales

Ahora encontraremos el mínimo global y el máximo global de una función derivable f definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Por el teorema del mínimo y del máximo, sabemos que f tiene un mínimo global y un máximo global. Para encontrarlos seguiremos el método siguiente.

1. Encontrar los mínimos locales y máximos locales de f en el intervalo (a, b).
2. El mínimo global de f será el mínimo de los valores de $f(a)$, $f(b)$ y los mínimos locales de f. El máximo global de f será el máximo de los valores de $f(a)$, $f(b)$ y los máximos locales de f.

Example 3. Encuentra el mínimo global y el máximo global de la función $f(x) = x^3 - 3x$ en el intervalo $[-5/4, 3]$.

Solución Como $f'(x) = 3x^2 - 3$, los puntos críticos de f en $[-5/4, 3]$ son -1 y 1. Puesto que $f''(x) = 6x$, entonces $f''(-1) < 0$ y $f''(1) > 0$. Luego, por el criterio de la segunda derivada, tenemos que $f(-1) = 2$ es un máximo local y que $f(1) = -2$ es un mínimo local. Así el mínimo global de f es

$$\min\{f(-5/4), f(3), 2, -2\} = -2$$

y el máximo global de f es

$$\max\{f(-5/4), f(3), 2, -2\} = f(3) = 18$$

(véase la figura 0.2).

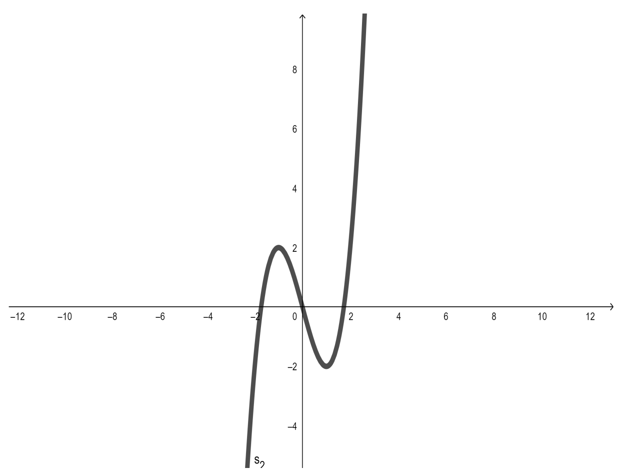

Figura 0.2 Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 3x$.

0.2.3. Análisis de Gráficos

En esta subsección aplicaremos todo lo aprendido en las subsecciones anteriores para analizar el comportamiento de una función a través de su gráfica. En general para estudiar la gráfica de una función seguiremos los pasos siguientes.

1. Determinar las intersecciones de la gráfica de f con los ejes coordenados.
2. Determinar si f es par o impar.
3. Determinar los intervalos donde f es creciente o decreciente.
4. Determinar los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o hacia abajo.
5. Determinar los puntos de inflexión de la gráfica de f.
6. Determinar los mínimos locales y máximos locales de f (si los hay).
7. Determinar el mínimo global y máximos globales de f (si los hay).
8. Determinar las asíntotas de la gráfica de f (si las hay).
9. Trazar la gráfica de f.

Example 4. Analiza la gráfica de la función $f(x) = 6x^5 - 10x^3$.

Solución

1. Determinar las intersecciones de la gráfica de f con los ejes coordenados: Las intersecciones de la gráfica de f con el eje X son los puntos de la forma $(x, 0)$, con $f(x) = 0$. Como
$$\begin{aligned} & f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & 6x^5 - 10x^3 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2x^3\left(3x^2 - 5\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0,\ \ x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \text{ o } x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$
entonces las intersecciones de la gráfica de f con el eje X son los puntos $\left(-\sqrt{5}/\sqrt{3}, 0\right)$, $(0,0)$ y $\left(\sqrt{5}/\sqrt{3}, 0\right)$. Por otra parte, la intersección de la gráfica de f con el eje Y, si $0 \in \operatorname{dom}(f)$, es el punto $(0, f(0)) = (0,0)$.
2. Determina si f es par o impar: Como $f(x) = -f(-x)$ para todo x, entonces la gráfica de f es impar.
3. Determinar los intervalos donde f es creciente o decreciente: Como

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & 30x^4 - 30x^2 = 0 \\
\Leftrightarrow & x^2\left(x^2 - 1\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & x = 0,\ \ x = 1 \text{ o } x = -1,
\end{aligned}
$$

entonces los puntos críticos de f son -1, 0 y 1. Para encontrar los intervalos abiertos donde f es creciente o decreciente consideremos el esquema siguiente.

Intervalo J	**Punto de prueba** p **en** J	**Signo de** $f'(p)$	**Signo de** f' **en** J
$(-\infty,-1)$	3	$+$	$+$
$(-1,0)$	$-1/2$	$-$	$-$
$(0,1)$	$1/2$	$-$	$-$
$(1,\infty)$	2	$+$	$+$

Así f es creciente en $(-\infty,-1)$, decreciente en $(-1,0)$, decreciente en $(0,1)$ y creciente en $(1,\infty)$.

4. Determinar los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o hacia abajo: Como

$$
\begin{aligned}
& f''(x) = 0 \\
\Leftrightarrow & 120x^3 - 60x = 0 \\
\Leftrightarrow & 60x\left(2x^2 - 1\right) = 0 \\
\Leftrightarrow & x = 0,\ \ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Por entonces los puntos críticos de f' son $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0 y $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Para encontrar los intervalos abiertos donde f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia arriba consideremos el esquema siguiente.

Intervalo J	**Punto de prueba** p **en** J	**Signo de** $f''(p)$	**Signo de** f'' **en** J
$\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	-1	$-$	$-$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$	$-1/2$	$+$	$+$
$\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$1/2$	$-$	$-$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$	1	$+$	$+$

Así f es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, cóncava hacia abajo en $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y cóncava hacia arriba en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\infty\right)$.

5. Determinar los puntos de inflexión de la gráfica de f : Del inciso 4, obtenemos que los puntos $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{7}{2\sqrt{2}}\right)$, $(0, f(0)) = (0,0)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{7}{2\sqrt{2}}\right)$ son los puntos de inflexión de la gráfica de f.
6. Determinar los mínimos locales y máximos locales de f (si los hay): Por el criterio de la segunda derivada, $f(-1) = 4$ es un máximo local de f y $f(1) = -4$ es un mínimo local. Como no podemos aplicar el criterio de la segunda derivada en el punto crítico 0 de f, utilizamos el criterio de la primera derivada, el cual nos dice que $f(0)$ no es ni mínimo local ni máximo local.
7. Determinar el mínimo global y máximo globales de f (si los hay): En este caso no hay ni mínimo global ni máximo local, pues por la proposición **??** tenemos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
8. Determinar las asíntotas de la gráfica de f : En este caso la gráfica de f no tiene asíntotas.
9. Trazar la gráfica de f : La gráfica de f aparece en la figura 0.3. □

`F:/NOTES/Cálculo/Figuras/Gráfiva de f(x)=6x^{5}-10x^{3}`

Figura 0.3 Fig: Gráfica de $f(x) = 6x^5 - 10x^3$.

0.2.4. Problemas de Optimización

Ahora veremos algunos ejemplos clásicos de optimización en donde aplicaremos las técnicas aprendidas en esta sección.

Example 5. Supongamos que un fabricante de empaques tiene un pedido cajas de metal con tapa y base cuadrada para un cliente. El cliente requiere que cada caja tenga un volumen V de 110 cm^3. ¿Cuáles serán las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de metal para construirla.

Supongamos que el cliente pide 10 millones de cajas y que el costo del metal empleado para construir la caja es de 2 pesos cada decímetro cuadrado? Si por un mal diseño de la caja se emplea un cm^2 de metal de más en cada caja, ¿Cuál sera la perdida de capital en la construcción de los 10 millones de cajas?

Solución Sea S la superficie de la caja que se quiere construir. Deseamos encontrar las dimensiones de la caja de manera que la superficie S sea mínima. Sean x, y y z las dimensiones de la caja que se quiere construir (véase la figura). Como la base de la caja es cuadrada, entonces $y = x$ y su volumen V es $x^2 z$. Puesto que se requiere que la caja tenga un volumen de 110 cm^3, entonces

$$x^2 z = V = 110. \tag{0.1}$$

Por otra parte, la superficie de la caja es

$$S = 2x^2 + 4xz. \tag{0.2}$$

De la ecuación (0.1) despejamos z y la sustituimos en la ecuación (0.2) para obtener la ecuación

$$\begin{aligned} S &= 2x^2 + 4xz \\ &= 2x^2 + 4x\left(\frac{110}{x^2}\right) \\ &= 2x^2 + \frac{440}{x}. \end{aligned}$$

Como la caja debe de tener volumen ($V = 110 > 0$), entonces consideraremos $x > 0$, es decir, supondremos que el dominio de S es el intervalo $(0, \infty)$. El único punto crítico de S es $\sqrt{104}$ que está en $(0, \infty)$. Puesto que $S''(x) = 4 + 880/x^3$, entonces $S''\left(\sqrt{104}\right) = 4 + 880/(104)^{3/2} > 0$. Así, por el criterio de la segunda derivada $S\left(\sqrt{104}\right)$ es un mínimo local. De hecho como $\lim_{x\to 0^+} S(x) = \lim_{x\to\infty} S(x) = \infty$, entonces $S\left(\sqrt{104}\right)$ es un mínimo global. En consecuencia las dimensiones de la caja buscada son $x = y = \sqrt{104}\ cm$ y $z = 110/x^2 = 110/104\ cm$, y la superficie mínima de la caja es $S\left(\sqrt{104}\right) = 208 + 440/\sqrt{104} \approx 251.1455\ cm^2$.

Finalmente, el costo por cm^2 de metal es 0.02 pesos, luego si por un mal diseño de la caja se emplea un cm^2 de metal de más en cada caja, la perdida de capital en la construcción de los 10 millones de cajas sera de 200000.00 pesos, ¡Upss!

Figura 0.4 Caja de dimensiones x, y y z.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

En esta clase se aprecia el poder de la derivada de manera casi mágica. El optimizar un proceso no es nada sencillo y el más mínimo error puede, por ejemplo, conducir en perdías millonarias de capital para la industria. Como viste en esta clase, la derivada te permite optimizar tales procesos.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos.* Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo.* Editorial Interamericana, 1998.