Sistema Universitario de Multimodalidad Educativa

CLASE DIGITAL 20

(Regla del Marqués del Hospital)

0.1. Presentación del contenido

¡Bienvenido a tu clase digital 20!

Supongamos que queremos calcular un límite de la forma

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)}, \tag{0.1}$$

donde $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to p} g(x) = 0$. Notemos que en esta situación no podemos aplicar el inciso (d) del álgebra de límites , pues el límite del denominador es cero. Notemos también que la derivada de una función es un límite de este tipo. Para ser más precisos, recordemos que si f es derivable en p, entonces$f'(p)$ está dada por

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

y este límite tiene la forma (0.1). Dada la importancia de encontrar la derivada de una función, es útil el disponer de herramientas que permitan calcular límites de la forma (0.1). Una de esas herramientas es la regla o fórmula del Marqués del Hospital.

0.2. Desarrollo del contenido

Iniciamos con la clase digital 20.

0.2.1. Formas Indeterminadas

Supongamos que queremos calcular

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{0.2}$$

y que

$$\frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p}} \tag{0.3}$$

toma la forma $\frac{0}{0}$, que carece de sentido. En este caso, como comentamos anteriormente, no se puede aplicar el inciso (d) del teorema del álgebra de límites. A $\frac{0}{0}$ se le llama forma indeterminada. La razón de esta terminología es que a partir de la información de que (0.3) toma la forma $\frac{0}{0}$ no podemos deducir la existencia del límite (0.2).

Análogamente, a $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$ y $\frac{-\infty}{-\infty}$ se les llama formas indeterminadas.

De manera similar, si queremos calcular límites de la forma

$$\lim_{x \to p} f(x)\, g(x)$$

se pueden presentar las formas indeterminadas $0 \cdot \infty$ o $\infty \cdot 0$, y si queremos calcular límites de la forma

$$\lim_{x \to p} \left(f(x) + g(x)\right)$$

se pueden presentar las formas indeterminadas $\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$.

0.2.2. Regla del Marqués del Hospital

Theorem 1. ***(Regla del Marqués del Hospital)*** *Supongamos que*

$$\frac{\lim_{x \to p} f(x)}{\lim_{x \to p}} \tag{0.4}$$

toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. *Si existe*

$$\lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La regla del Marqués del Hospital sigue siendo válida si en lugar de considerar limites cuando $x \to p$ se consideran límites laterales o límites al infinito, y si, en lugar de la forma $\frac{0}{0}$, en (0.4) aparece cualquiera de las formas indeterminadas $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$ o $\frac{-\infty}{-\infty}$. En las siguientes subsubsecciones calcularemos límites que conducen a este tipo de formas indeterminadas.

0.2.2.1. Límites con la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Example 1. **(Forma indeterminada $\frac{0}{0}$)** Calcula

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}.$$

Solución Notemos que

$$\frac{\lim_{x \to -1} \left(x^2 + 4x + 3\right)}{\lim_{x \to -1} (x + 1)}$$

toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Luego, por la regla del Marqués del Hospital resulta que

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{2x + 4}{1} = 2. \ \square$$

Example 2. **(Forma indeterminada $\frac{0}{0}$)** Calcula

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Solución Recordemos que ya calculamos este límite usando el lema del sándwich en la subsección de límites reales. Notemos que

$$\frac{\text{lím}_{x\to 0}\sin(x)}{\text{lím}_{x\to 0} x}$$

toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Luego, por la regla del Marqués del Hospital resulta que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1,$$

como habíamos calculado. □

Example 3. **(Forma indeterminada $\frac{0}{0}$)** Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin(3x)}.$$

Solución Notemos que

$$\frac{\text{lím}_{x\to 0}\sin(5x)}{\text{lím}_{x\to 0}\sin(3x)}$$

toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Luego, por la regla del Marqués del Hospital resulta que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5\cos(5x)}{3\cos(3x)} = \frac{5}{3}.\ \square$$

Example 4. **(Uso repetido de la Regla del Marqués del Hospital)** Calcula

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}.$$

Solución Notemos que

$$\frac{\text{lím}_{x\to 0} 1-\cos(x)}{\text{lím}_{x\to 0} x^2}$$

toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Luego, por la regla del Marqués del Hospital resulta que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x},$$

siempre y cuando este último límite exista. Notemos ahora que

$$\frac{\lim_{x \to 0} \sin(x)}{\lim_{x \to 0} 2x}$$

también toma la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aplicando nuevamente la regla del Marqués del Hospital resulta que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}. \ \square$$

0.2.2.2. Límites con otras formas indeterminadas.

Example 5. **(Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$)** Calcula

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x}.$$

Solución Notemos que

$$\frac{\lim_{x \to \infty} \ln(x)}{\lim_{x \to \infty} x}$$

toma la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Luego, por la regla del Marqués del Hospital resulta que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0. \ \square$$

Como una aplicación interesante de la fórmula del Marqués del Hospital, probaremos que la función exponencial crece más rápido que cualquier polinomio.

Example 6. **(La función exponencial crece más rápido que cualquier polinomio)** Sea $P(x)$ un polinomio. Entonces

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0. \tag{0.5}$$

En efecto, por el álgebra de límites al infinito, basta probar el caso en que $P(x) = x^n$. Al aplicar la regla del Marqués del Hospital n veces obtenemos que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \cdots \lim_{x \to \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

La ecuación (0.5) implica que la función exponencial crece más rápido que el polinomio $P(x)$, aunque $\lim_{x \to \infty} P(x) = \pm\infty$, para el caso de polinomios no constantes. □

Example 7. **(Forma indeterminada $0 \cdot \infty$)** Calcula

$$\lim_{x \to \infty} xe^{1-x}.$$

Solución Notemos que

$$\left(\lim_{x \to \infty} x\right)\left(\lim_{x \to \infty} e^{1-x}\right)$$

toma la forma indeterminada $0 \cdot \infty$. Lo que haremos será expresar xe^{1-x} de otra manera para poder emplear la regla del Marqués del Hospital. Puesto que

$$xe^{1-x} = \frac{x}{e^{x-1}}$$

y

$$\frac{\lim_{x \to \infty} x}{\lim_{x \to \infty} e^{x-1}}$$

toma la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, al aplicar la regla del Marqués del Hospital resulta que

$$\lim_{x \to \infty} = xe^{1-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0. \ \square$$

En general, como en el ejemplo anterior, cuando queramos calcular el límite de un producto de funciones que conduce a una forma indeterminada, se intenta expresar dicho producto de otra manera para poder usar la regla del Marqués del Hospital.

Finalmente, es importante señalar que no existe un criterio similar a la regla del Marqués del Hospital para calcular el límite de una suma de funciones $f(x) + g(x)$ que produce una forma indeterminada de la forma $\infty - \infty$ o de la forma $-\infty + \infty$. En tales casos se procede utilizando las propiedades particulares de las funciones f y g.

0.3. Conclusiones y énfasis de ideas clave

En esta clase aprendiste a calcular límites que conducen a formas indeterminadas y que con las herramientas clásicas que vimos en las clases pasadas era imposible de calcular. La herramienta fundamental para calcular tales límites es la regla del Marqués del Hospital.

¡Espero hayas disfrutado esta clase!

Saludos,
Dr. Fernando Núñez Medina
Departamento de Matemáticas
DCNE UG.

Referencias

1. Larson, Hostetler y Edwards, *Cálculo* 10 ed, Cengage, México 2014.
2. F. Nuñez Medina. *Cálculo I para Todos*. Notas de clase 2020.
3. E. W. Swokowski. *Calculo*. Editorial Interamericana, 1998.